

Применение кватернионов в модальном управлении ориентацией космических аппаратов

© Н.Е. Зубов^{1,2}, А.В. Лапин¹, Е.А. Микрин^{1,2}

¹ОАО «Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва»,
г. Королев Московской области, 141070, Россия

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе метода точного размещения полюсов как наиболее универсального метода модального управления решается задача построения заданной ориентации космического аппарата с использованием элементов кватернионов при описании вращательных движений. В качестве примера рассмотрена задача управления угловым движением космического аппарата на участке посадки.

Ключевые слова: космический аппарат, модальное управление, кватернионы, метод точного размещения полюсов.

Введение. В настоящее время при описании вращательных движений динамических объектов нашли применение три формы кинематических параметров: углы Эйлера — Крылова, направляющие косинусы и кватернионы [1]. С практической точки зрения, особое значение имеет рациональность описания пространственного движения. Поэтому использование кватернионов обладает рядом несомненных преимуществ, что подтверждено практикой применения этих кинематических параметров при построении бортовых алгоритмов управления угловым движением космических аппаратов (КА). Активное развитие методов модального управления до настоящего времени не затронуло вопроса использования кватернионов при решении задач ориентации. Данная работа посвящена применению кватернионов при решении задачи построения заданной ориентации КА с помощью наиболее универсального метода модального управления, получившего название метода точного размещения полюсов [2].

1. Уравнения движения. При описании углового движения КА используются две правосторонние ортогональные системы координат.

Связанная система координат (ССК) Ox, Oy, Oz ведет отсчет из центра масс (ЦМ) КА. Оси Ox, Oy и Oz — заданные строительные оси КА.

Инерциальная система координат (ИСК) $OXYZ$ определена в соответствии с [3] некоторым заданным образом в зависимости от решаемой задачи.

КА рассматривается как абсолютно твердое тело, динамика углового движения которого описывается в ССК уравнениями Эйлера [3]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_y, \quad (1.1)$$

где \mathbf{J} — тензор инерции КА, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости КА, $\mathbf{M}_в$ — внешний детерминированный возмущающий момент, $\mathbf{M}_у$ — управляющий момент.

В общем случае тензор инерции \mathbf{J} содержит как осевые J_x, J_y и J_z , так и центробежные моменты инерции J_{xy}, J_{xz} и J_{yz} в ССК:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Кинематика углового движения КА описывается уравнениями в параметрах кватерниона [4]. При этом используется собственный кватернион поворота между системами координат ИСК и ССК: $\Lambda^T = [\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}^T]$, где λ_0 — скалярная часть кватерниона, а $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ — его векторная часть. Кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}. \quad (1.3)$$

Здесь Λ — нормированный кватернион ($\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$), а символом \circ обозначен оператор некоммутативного произведения кватернионов.

Кинематические уравнения (1.3) удобно переписать отдельно для скалярной и векторной частей кватерниона:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = -0,5(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -0,5\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0,5(\lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}) = 0,5(\lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L} \boldsymbol{\omega}), \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Линеаризация уравнений движения. Перепишем систему, составленную из динамических уравнений (1.1) и кинематических уравнений (1.4), в виде обобщенного векторно-матричного дифференциального уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} \\ 0,5(\lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L} \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{M}_у, \quad (2.1)$$

для краткости обозначив символом $\mathbf{M}(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_в(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_Г(\boldsymbol{\omega})$ суммарный детерминированный возмущающий момент, символом

$\mathbf{M}_r(\omega) = \omega \times (\mathbf{J}\omega)$ — гироскопический момент, а $\mathbf{0}_{n \times m}$ — нулевую матрицу размерности $n \times m$.

Объект (2.1) представляет собой нелинейную нестационарную САР с семимерным вектором состояния $\mathbf{x}^T = [\lambda_0 - 1, \lambda^T, \omega^T]$ и трехмерным вектором управления $\mathbf{u} = \mathbf{M}_y$.

Рассмотрим угловое движение КА за промежуток времени h , равный длительности одного вычислительного такта БЦВМ. Будем считать, что на момент начала каждого вычислительного такта известно значение вектора состояния \mathbf{x} . При этом соответствующие значения параметров движения Λ и ω могут быть измерены на борту КА с помощью различных датчиков либо получены расчетным путем в результате численного интегрирования уравнений движения. Условимся значения параметров объекта в начале такта обозначать верхней чертой над символом переменной величины, например, $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$.

В рамках рассматриваемого вычислительного такта длительностью h произведем линеаризацию первого слагаемого в правой части уравнения (2.1). Для этого кинематические уравнения, записанные в виде (1.4), заменим приближенными равенствами

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 \approx -0,5 \bar{\omega}^T \lambda, \\ \dot{\lambda} \approx 0,5 (\bar{\omega} \lambda_0 + \bar{\mathbf{L}} \omega), \end{cases} \quad (2.2)$$

а суммарный возмущающий момент, как векторную функцию от скалярных и векторных аргументов, разложим в ряд Тейлора в окрестности положения $\bar{\mathbf{x}}$, отбросив слагаемые второго и более высоких порядков малости:

$$\mathbf{M}(\lambda_0, \lambda, \omega) \approx \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{M}}_{\lambda_0} (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0) + \bar{\mathbf{M}}_{\lambda} (\lambda - \bar{\lambda}) + \bar{\mathbf{M}}_{\omega} (\omega - \bar{\omega}), \quad (2.3)$$

где $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\omega})$ — значение функции $\mathbf{M}(\lambda_0, \lambda, \omega)$, а $\bar{\mathbf{M}}_{\lambda_0} = \mathbf{M}'_{\lambda_0}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\omega})$, $\bar{\mathbf{M}}_{\lambda} = \mathbf{M}'_{\lambda}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\omega})$ и $\bar{\mathbf{M}}_{\omega} = \mathbf{M}'_{\omega}(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\omega})$ — значения матриц Якоби, содержащих частные производные от данной функции соответственно по аргументам $\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}$ и $\bar{\omega}$, в точке с координатами $(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\omega})$.

Подставив выражения (2.2) и (2.3) в матричное дифференциальное уравнение (2.1) и заменив их строгими равенствами, получим кусочно-линейную модель углового движения ВА, которая на каждом вычислительном такте будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{N}\xi, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & -0,5\bar{\omega}^T, & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ 0,5\bar{\omega}, & \mathbf{0}_{3 \times 3}, & 0,5\bar{\mathbf{D}} \\ \bar{\mathbf{J}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{\lambda_0}, & \bar{\mathbf{J}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{\lambda}, & \bar{\mathbf{J}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{\omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \bar{\mathbf{J}}^{-1} \end{bmatrix},$$

где $\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{L}} + \mathbf{E}_3$, $\xi = \bar{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{M}}_{\lambda_0}(\bar{\lambda}_0 - 1) - \bar{\mathbf{M}}_{\lambda}\bar{\lambda} - \bar{\mathbf{M}}_{\omega}\bar{\omega}$, \mathbf{E}_n — единичная матрица размерности n .

3. Учет постоянного возмущения. Уравнение (2.4) описывает объект регулирования, подверженный на каждом такте внешнему детерминированному возмущению $\xi(t) = \text{const}$. Требуется найти управление \mathbf{u} , при котором установившаяся ошибка по вектору состояния $\mathbf{x}_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ удовлетворяла бы условию $\mathbf{x}_{\text{уст}} = \mathbf{0}_{7 \times 1}$, а корни характеристического уравнения замкнутой САР (ЗСАР) располагались бы заданным образом в плоскости корней.

Пусть $\mathbf{u}_{\text{уст}}$ — установившаяся ошибка по вектору управления. Тогда, поскольку $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{7 \times 1}$, из уравнения (2.4) следует, что $\mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{уст}} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{\text{уст}} = -\mathbf{N}\xi$, а конкретный вид матриц \mathbf{B} и \mathbf{N} позволяет записать соотношение $\mathbf{u}_{\text{уст}} = -\xi$.

Для решения задачи введем новые переменные $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{уст}}$ и $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{уст}}$, в которых уравнение объекта (2.4) приобретает вид

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}. \quad (3.1)$$

Предположим, что некоторым образом найдено управление $\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}\Delta\mathbf{x}$ с матрицей регулятора по состоянию \mathbf{K} размерности 3×7 , обеспечивающее требуемое расположение корней ЗСАР. Тогда, согласно определению переменных $\Delta\mathbf{x}$ и $\Delta\mathbf{u}$, очевидно, что искомое управление \mathbf{u} должно рассчитываться по формуле

$$\mathbf{u} = -\xi - \mathbf{K}\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Матрицу регулятора \mathbf{K} будем определять методом точного размещения полюсов согласно алгоритму, изложенному в [2].

4. Алгоритм точного размещения полюсов. Задана линейная многомерная модель объекта (3.1) с вектором состояния $\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$ и вектором управления $\Delta\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, где \mathbb{R} — множество действительных чисел. Из (2.4) видно, что ранг матрицы управления $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{7 \times 3}$ равен числу ее столбцов, т. е. входные сигналы линейно независимы. При этом матрица состояния $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ в общем случае неустойчива, поскольку среди ее семи ($j = 1 \dots 7$) собственных значений в спектре

$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{ \hat{v}_j \in \mathbb{C} : \det(\hat{v}_j \mathbf{E}_7 - \mathbf{A}) = 0 \}$ могут найтись такие значения \hat{v}_j из множества комплексных чисел \mathbb{C} , что $\text{Re } \hat{v}_j > 0$.

С помощью пакета Symbolic Math Toolbox в среде Matlab [5] установлено, что $\text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^6\mathbf{B}] = 7$, если $\bar{\omega} \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$. А поскольку случай равенства нулю всех трех компонент угловой скорости (полученной с датчиков) на практике невозможен, рассматриваемая САР (3.1) полностью управляема согласно критерию Калмана.

Требуется найти закон управления $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}\Delta \mathbf{x}$, характеризуемый матрицей регулятора по состоянию $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3 \times 7}$, такой, чтобы все семь элементов v_j спектра ЗСАР $\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \{v_j \in \mathbb{C} : \det(v_j \mathbf{E}_7 - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0\}$ лежали в открытой левой полуплоскости на комплексной плоскости \mathbb{C} , т. е. для любого j выполнялось неравенство $\text{Re } v_j < 0$.

При решении поставленной задачи будем использовать понятия левого делителя нуля максимального ранга и псевдообратной матрицы Мура — Пенроуза.

Левым делителем нуля максимального ранга [6] для некоторой действительной матрицы $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга $r < n$ называется матрица \mathbf{B}^\perp , одновременно удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$\mathbf{B}^\perp \mathbf{B} = \mathbf{0}_{(n-r) \times m}, \quad \text{rank } \mathbf{B}^\perp = n - r. \quad (4.1)$$

В общем случае произвольной матрице $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга $r < n$ соответствует бесконечное множество левых делителей нуля максимального ранга.

Псевдообратной матрицей по Муру — Пенроузу [6] для некоторой действительной матрицы $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ называется матрица \mathbf{B}^+ , одновременно удовлетворяющая следующим четырем критериям (двум условиям регулярности и двум условиям симметричности):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{B}^+\mathbf{B} &= \mathbf{B}, & \mathbf{B}^+\mathbf{B}\mathbf{B}^+ &= \mathbf{B}^+ & (\text{условия регулярности}); \\ (\mathbf{B}\mathbf{B}^+)^T &= \mathbf{B}\mathbf{B}^+, & (\mathbf{B}^+\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^+\mathbf{B} & (\text{условия симметричности}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Псевдообратная матрица всегда определяется однозначно.

В случае если ранг матрицы \mathbf{B} равен числу ее столбцов, псевдообратная матрица \mathbf{B}^+ находится аналитически по формуле $\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$. Если ранг матрицы \mathbf{B} соответствует числу строк, то справедлива аналогичная формула $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$. Для квадратной невырожденной матрицы \mathbf{B} псевдообратная матрица совпадает с обратной матрицей: $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^{-1}$.

Введем в рассмотрение трехуровневую декомпозицию системы (3.10) по схеме, изложенной в [2]. Применяется модифицированный метод ТРП [7], согласно которому левые делители нуля выбираются произвольно, исходя только из условий (4.1), независимо от того, выполняется ли требование полуортогональности $\mathbf{B}^\perp \mathbf{B}^{\perp T} = \mathbf{E}_{n-r}$ (как в случае с классическим методом ТРП).

Нулевой уровень

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5\bar{\omega}^T & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ 0,5\bar{\omega} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0,5\bar{\mathbf{D}} \\ \bar{\mathbf{J}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{\lambda_0} & \bar{\mathbf{J}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{\lambda} & \bar{\mathbf{J}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{\omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \bar{\mathbf{J}}^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_0^\perp = [\mathbf{E}_4, \quad \mathbf{0}_{4 \times 3}],$$

$$\mathbf{B}_0^{\perp+} = \mathbf{B}_0^{\perp T} (\mathbf{B}_0^\perp \mathbf{B}_0^{\perp T})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_4 \\ \mathbf{0}_{4 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0^+ = (\mathbf{B}_0^T \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{B}_0^T = [\mathbf{0}_{3 \times 4}, \quad \bar{\mathbf{J}}].$$

Первый уровень

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp+} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5\bar{\omega}^T \\ 0,5\bar{\omega} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ 0,5\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{J}}^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_1^\perp = [1, \quad \mathbf{0}_{1 \times 3}],$$

$$\mathbf{B}_1^{\perp+} = \mathbf{B}_1^{\perp T} (\mathbf{B}_1^\perp \mathbf{B}_1^{\perp T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1^+ = (\mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_1^T = [\mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad 2\bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}].$$

Второй уровень

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_1^\perp \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{\perp+} = 0, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1^\perp \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 = -0,25\bar{\omega}^T \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{J}}^{-1}.$$

Поскольку размерность вектора состояния равна семи и не кратна размерности вектора управления, равной трем, наблюдается «вырождение» крайнего (второго) уровня декомпозиции (число столбцов матрицы $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ превышает число ее строк). Это приводит к тому, что для матрицы \mathbf{B}_2 принципиально невыполнимо условие полноты ранга по столбцам. Таким образом, применение классического алгоритма ТРП невозможно. В соответствии с модифицированным алго-

ритмом ТРП следует выполнить скелетное разложение [8] матрицы \mathbf{B}_2 и перезапустить алгоритм ТРП на текущем шаге.

Для того чтобы выполнить скелетное разложение, представим матрицу \mathbf{B}_2 в виде произведения двух матриц:

$$\mathbf{B}_2 = \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{T}_2, \quad (4.3)$$

где ранг первого множителя $\hat{\mathbf{B}}_2$ совпадает с числом столбцов, а ранг второго множителя \mathbf{T}_2 — с числом строк. Поскольку исходная матрица \mathbf{B}_2 содержит одну строку и $\text{rank } \mathbf{B}_2 = 1$, в формуле (4.3) можно положить $\hat{\mathbf{B}}_2 = 1$ и $\mathbf{T}_2 = \mathbf{B}_2$. Очевидно, что такое разложение будет являться скелетным.

Используя разложение (4.3), осуществим «перезапуск» алгоритма ТРП на втором уровне декомпозиции.

Второй модифицированный уровень

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2 = 0, \quad \hat{\mathbf{B}}_2 = 1; \quad \hat{\mathbf{B}}_2^+ = \hat{\mathbf{B}}_2^{-1} = 1.$$

Далее проводится расчет матриц регуляторов, соответствующих каждому из трех введенных уровней декомпозиции.

Назначим три матрицы $\Phi_2 \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$, $\Phi_1 \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ и $\Phi_0 \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, собственные значения которых образуют в совокупности желаемый спектр ЗСАР (3.1), т. е. $\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \text{eig}(\Phi_2) \cup \text{eig}(\Phi_1) \cup \text{eig}(\Phi_0)$.

На втором модифицированном уровне матрица регулятора $\hat{\mathbf{K}}_2$ определяется обычным образом в соответствии с классическим алгоритмом ТРП:

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \hat{\mathbf{B}}_2^+ \hat{\mathbf{A}}_2 - \Phi_2 \hat{\mathbf{B}}_2^+ = -\varphi_2, \quad (4.4)$$

где $\Phi_2 = \varphi_2$, а φ_2 — некоторое действительное число.

Введем в рассмотрение матрицу \mathbf{T}_2^{+-} , удовлетворяющую условию

$$\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2^{+-} = 1. \quad (4.5)$$

Поскольку $\text{eig}(\Phi_2) = \text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_2 - \hat{\mathbf{B}}_2 \hat{\mathbf{K}}_2) = \text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_2 - \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2^{+-} \hat{\mathbf{K}}_2) = \text{eig}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{T}_2^{+-} \hat{\mathbf{K}}_2)$, матрица регулятора \mathbf{K}_2 на втором классическом уровне определяется по формуле

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{T}_2^{+-} \hat{\mathbf{K}}_2. \quad (4.6)$$

Заметим, что для выполнения тождества (4.5) достаточно положить $\mathbf{T}_2^{+-} = \mathbf{T}_2^+$, т. е. использовать псевдообратную матрицу

$$\mathbf{T}_2^+ = \mathbf{T}_2^\top \left(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2^\top \right)^{-1} = -\frac{4}{\bar{\omega}^\top \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{J}}^{-1} \bar{\mathbf{J}}^{-1} \bar{\mathbf{D}}^\top \bar{\omega}} \bar{\mathbf{J}}^{-1} \bar{\mathbf{D}}^\top \bar{\omega}, \quad (4.7)$$

удовлетворяющую условиям (4.2). Однако при этом одно из требований симметричности из (4.2), а именно требование $\left(\mathbf{T}_2^{+-} \mathbf{T}_2 \right)^\top = \mathbf{T}_2^{+-} \mathbf{T}_2$, окажется избыточным. Поэтому для матрицы \mathbf{T}_2^{+-} можно записать более простое выражение, нежели (4.7):

$$\mathbf{T}_2^{+-} = -\frac{4}{\bar{\omega}^\top \bar{\omega}} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\omega}. \quad (4.8)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица (4.8) удовлетворяет условию (4.5).

Подставив (4.4) и (4.8) в (4.6), найдем значение матрицы \mathbf{K}_2 :

$$\mathbf{K}_2 = \frac{4\varphi_2}{\bar{\omega}^\top \bar{\omega}} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\omega}. \quad (4.9)$$

Значение матрицы регулятора \mathbf{K}_1 на первом уровне декомпозиции вычисляется по формуле $\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^-$, где $\mathbf{B}_1^- = \mathbf{B}_1^+ + \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_1^\perp = \left[\mathbf{K}_2, \quad 2\bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \right]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= [\mathbf{K}_{11}, \quad \mathbf{K}_{12}], \quad \mathbf{K}_{11} = \left(\mathbf{E}_3 - \frac{4\varphi_2}{\bar{\omega}^\top \bar{\omega}} \Phi_1 \right) \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\omega}, \\ \mathbf{K}_{12} &= -2 \left(\frac{\varphi_2}{\bar{\omega}^\top \bar{\omega}} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\omega} \bar{\omega}^\top + \Phi_1 \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Аналогично, значение матрицы регулятора \mathbf{K}_0 на нулевом уровне декомпозиции рассчитывается из соотношения $\mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^- \mathbf{A}_0 - \Phi_0 \mathbf{B}_1^-$, где $\mathbf{B}_0^- = \mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp = \left[\mathbf{K}_1, \quad \bar{\mathbf{J}} \right]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= [\mathbf{K}_{01}, \quad \mathbf{K}_{02}, \quad \mathbf{K}_{03}], \\ \mathbf{K}_{01} &= \bar{\mathbf{M}}_{\lambda_0} - \left(\varphi_2 \mathbf{E}_3 - \mathbf{P} - \frac{4\varphi_2}{\bar{\omega}^\top \bar{\omega}} \mathbf{Q} \right) \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\omega}, \\ \mathbf{K}_{02} &= \bar{\mathbf{M}}_{\lambda} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_3 + \frac{4\varphi_2}{\bar{\omega}^\top \bar{\omega}} \mathbf{P} \right) \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\omega} \bar{\omega}^\top + 2\mathbf{Q} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1}, \\ \mathbf{K}_{03} &= \bar{\mathbf{M}}_{\omega} - \frac{\varphi_2}{\bar{\omega}^\top \bar{\omega}} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\omega} \bar{\omega}^\top \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{J}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\mathbf{P} = -(\Phi_0 + \Phi_1)$, $\mathbf{Q} = \Phi_0 \Phi_1$.

В пакете символьных вычислений Matlab была проведена проверка полученных соотношений (4.9), (4.10) и (4.11), которая подтвердила, что:

- 1) $\text{eig}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2) = \text{eig}(\Phi_2)$,
- 2) $\text{eig}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1) = \text{eig}(\Phi_2) \cup \text{eig}(\Phi_1)$,
- 3) $\text{eig}(\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{K}_0) = \text{eig}(\Phi_2) \cup \text{eig}(\Phi_1) \cup \text{eig}(\Phi_0)$.

Таким образом, на каждом такте управление \mathbf{u} рассчитывается из соотношения (3.2), где ξ определено согласно (2.4), а $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$ — согласно (4.11).

5. Выбор корней характеристического полинома. С целью упрощения выражений (4.11) для матрицы регулятора \mathbf{K} положим, что матрицы желаемых корней Φ_1 и Φ_0 равны, имеют по три одинаковых собственных значения и могут быть записаны в диагональной форме $\Phi_0 = \Phi_1 = a\mathbf{E}_3$, где a — некоторое действительное число. Величину оставшегося корня φ_2 будем задавать переменной на различных вычислительных тактах с постоянным действительным коэффициентом b согласно выражению $\varphi_2 = b\bar{\omega}^T \bar{\omega}$. С целью уменьшения влияния переменного корня на переходный процесс, а также из соображений устойчивости назначим $b = -0,01$. В результате (4.11) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\mathbf{K}_{\lambda_0}, \mathbf{K}_{\lambda}, \mathbf{K}_{\omega}], \\ \mathbf{K}_{\lambda_0} &= \bar{\mathbf{M}}_{\lambda_0} - \bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}\bar{\omega}(2a(1 + 0,02a) - 0,01\bar{\omega}^T \bar{\omega}), \\ \mathbf{K}_{\lambda} &= \bar{\mathbf{M}}_{\lambda} - \bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}(0,5(1 + 0,08a)\bar{\omega}\bar{\omega}^T - 2a^2\mathbf{E}_3), \\ \mathbf{K}_{\omega} &= \bar{\mathbf{M}}_{\omega} - \bar{\mathbf{J}}(2a\mathbf{E}_3 - 0,01\bar{\mathbf{D}}^{-1}\bar{\omega}\bar{\omega}^T \bar{\mathbf{D}}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

В записи равенств (5.1) используется только один переменный параметр a . Из условия устойчивости ЗСАР вида (3.1) с матрицей регулятора (5.1) следует строгая отрицательная определенность данного параметра — $a < 0$. Для поиска конкретных значений a условно положим, что длительность вычислительного такта БЦВМ мала $h \rightarrow 0$, а вычисления в бортовом компьютере и обработка управляющих сигналов на двигателях производятся мгновенно. Тогда, подставляя значение управляющего момента $\mathbf{M}_y = \mathbf{u}$ из (3.2) с учетом (2.4) и (5.1) в полную модель углового движения КА (2.1), получим систему уравнений управляемого движения:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = -0,5\omega^T\lambda, \\ \dot{\lambda} = 0,5(\lambda_0\omega + \mathbf{L}\omega), \\ \dot{\omega} = 2a(\omega - a\lambda) + k(\lambda_0, \lambda, \omega)\mathbf{D}^{-1}\omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $k(\lambda_0, \lambda, \omega) = 2a(1 + 0,02a)(\lambda_0 - 1) + 0,5(1 + 0,08a)\omega^T\lambda - 0,01\lambda_0\omega^T\omega$ — скалярная функция параметров состояния КА.

Рассмотрим задачу о выборе значений параметра a . Исследуется переходный процесс (ПП) приведения ориентации КА, описываемый уравнениями (5.2), начинающийся в момент времени $t_n = 0$ и завершающийся к моменту времени t_k , длительностью $T_{\text{ПП}} = t_k - t_n$. В момент времени t_n ориентация КА задана некоторыми начальными значениями кватерниона и угловой скорости:

$$\begin{aligned} \Lambda(t_n) &= \Lambda_n = \cos \frac{\vartheta_n}{2} + \mathbf{e}_n \sin \frac{\vartheta_n}{2}, \\ \omega(t_n) &= \omega_n, \end{aligned} \quad (5.3)$$

при этом предполагается, что для угла конечного поворота $\vartheta(t_n)$ справедливо неравенство $\vartheta_n \geq 10^\circ$, а для модуля угловой скорости $\omega(t_n)$ — $\omega_n \geq 20$ град/с. Критерием окончания ПП является одновременное выполнение для $\forall t \geq t_k$ следующих условий:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &\leq \vartheta_k, \\ \omega(t) &\leq \omega_k. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Назначим $\vartheta_k = 0,1^\circ$ и $\omega_k = 0,1$ град/с.

Требуется определить оптимальное в смысле минимума времени ПП $T_{\text{ПП}} = T_{\text{ППmin}}$ значение параметра $a = a_{\text{опт}}$ при соблюдении для $\forall t \in [t_n; t_k]$ по каждому из трех каналов управления $i = \overline{1...3}$ заданных ограничений

$$\begin{aligned} \omega(t) &\leq \omega_{\text{lim}} + \delta_\omega, \\ |\dot{\omega}_i(t)| &\leq \dot{\omega}_{\text{lim}} + \delta_{\dot{\omega}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Предельные значения модуля угловой скорости и ее градиента, а также значения допустимых превышений этих величин назначим соответственно следующими: $\omega_{\text{lim}} = 30$ град/с, $\dot{\omega}_{\text{lim}} = 50$ град/с², $\delta_\omega = 2 - 3$ град/с, $\delta_{\dot{\omega}} = 3 - 5$ град/с².

В среде программирования Delphi было проведено математическое моделирование процесса (5.2). При этом различным начальным значениям угла конечного поворота ϑ_n из диапазона от 10 до 180°

с шагом 5° были поставлены в соответствие начальные условия (5.3) в виде

$$\Lambda_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_n}{2} [0, 1, 1, 1]^T, \quad (5.6)$$

$$\omega_n = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ град/с.}$$

Для каждого набора начальных условий (5.6) согласно критерию (5.4) определялось время ПП $T_{\text{ПП}}$ при различных значениях параметра $a \in [-3; 0)$, после чего с точностью 0,001 находилось оптимальное в смысле (5.5) значение данного параметра $a = a_{\text{opt}}$, которому соответствует минимальная величина $T_{\text{ПП}} = T_{\text{ПП min}}$. В результате были построены графики эмпирических зависимостей $\tilde{a}_{\text{opt}}(\vartheta_n)$ (рис. 1, эталон) и $\tilde{T}_{\text{ПП min}}(\vartheta_n)$ (рис. 2).

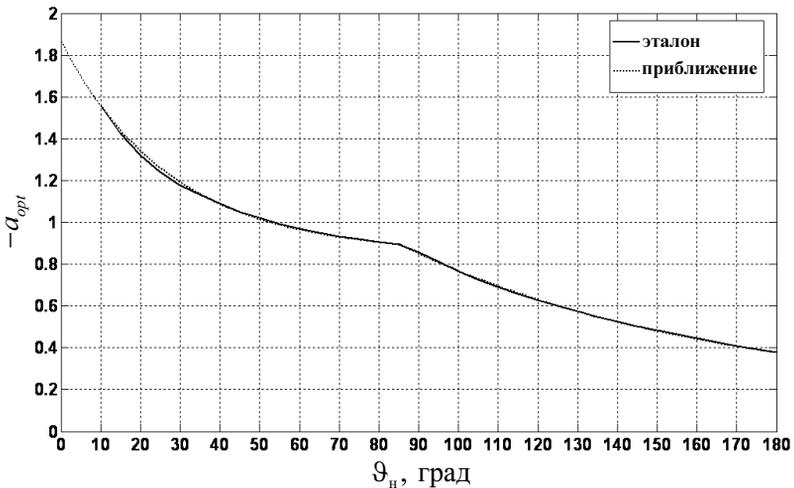


Рис. 1. Оптимальные значения параметра a при различных начальных условиях

На полученных графиках можно выделить два участка по аргументу ϑ_n : до 85° и после 85° . Это обусловлено тем, что на ПП накладывались два ограничения (5.5) — по модулю угловой скорости и по ее градиентам. Для первого участка определяющим является ограничение по градиентам угловой скорости, а для второго участка — по модулю.

Предлагается эмпирическую зависимость $\tilde{a}_{\text{opt}}(\vartheta_n)$ на каждом из указанных участков аппроксимировать показательной функцией вида $f(x) = A \exp(\alpha x) + B$. Такая аппроксимация была произведена в среде Matlab для первого участка по точкам с абсциссами $10, 45$ и 85° , для второго участка — по точкам $85, 135$ и 180° . В результате была получена аналитическая зависимость

$$a_{\text{opt}}(\vartheta_n) = \begin{cases} -1,018 \exp\left(-2,071 \frac{\pi \vartheta_n}{180}\right) - 0,849, & \text{если } 0 < \vartheta_n \leq 85^\circ, \\ -2,177 \exp\left(-0,726 \frac{\pi \vartheta_n}{180}\right) - 0,155, & \text{если } 85^\circ < \vartheta_n \leq 180^\circ, \end{cases} \quad (5.7)$$

которую можно применять на практике. График этой зависимости представлен на рис. 1 (приближение).

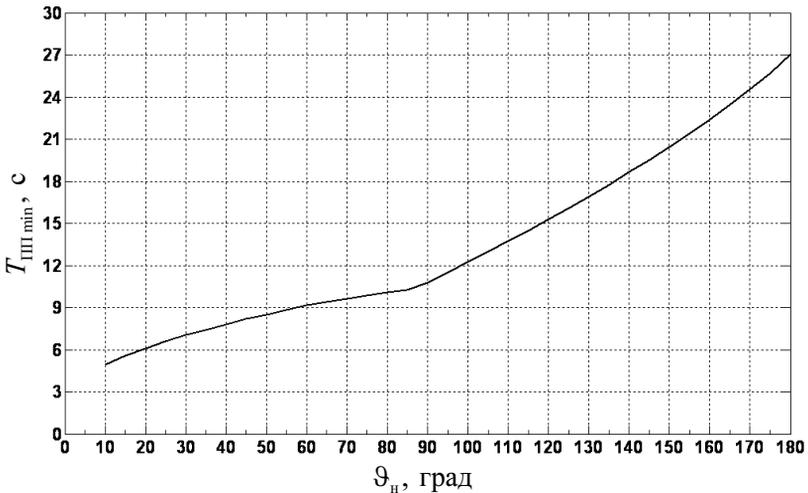


Рис. 2. Минимальные значения времени ПП при различных начальных условиях

6. Пример численного моделирования. Рассматривается тот же, что и в [9], пример численного моделирования для следующих начальных условий: $\lambda_{n1} = 0,3$, $\lambda_{n2} = -0,5$, $\lambda_{n3} = 0,8$ (компоненты векторной части кватерниона), $\omega_{n1} = -10$ град/с, $\omega_{n2} = -7$ град/с, $\omega_{n3} = 11$ град/с (компоненты вектора угловой скорости). Начальный угол конечного поворота, таким образом, задан равным $\vartheta_n = 163,74^\circ$, чему, согласно (5.7), соответствует значение параметра $a = -0,428$.

По результатам численного моделирования в среде Delphi были построены графики ПП для компонент кватерниона (рис. 3) и для компонент вектора угловой скорости (рис. 4).

Длительность ПП составила 22,8 с, что согласуется с проектными требованиями, предъявляемыми ко времени работы посадочных двигателей. Максимальное значение модуля угловой скорости оказалось равным 28,3 град/с, а наибольшие значения градиентов угловой скорости по каждому из каналов управления составили соответственно 2,1, 16,4 и 16,1 град/с. Таким образом, ПП удовлетворяет заданным ограничениям (5.5).

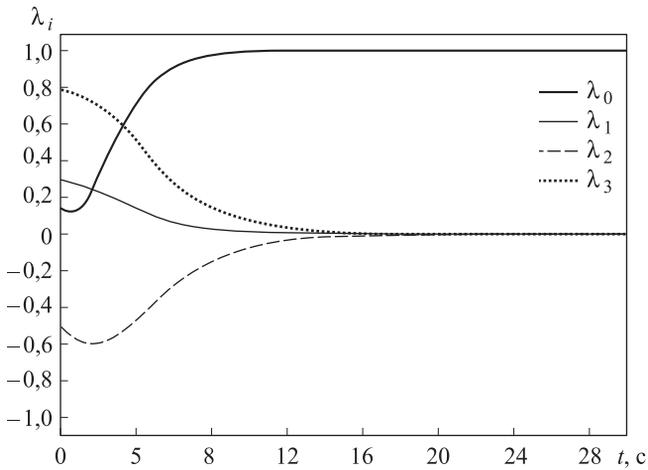


Рис. 3. ПП для компонент кватерниона

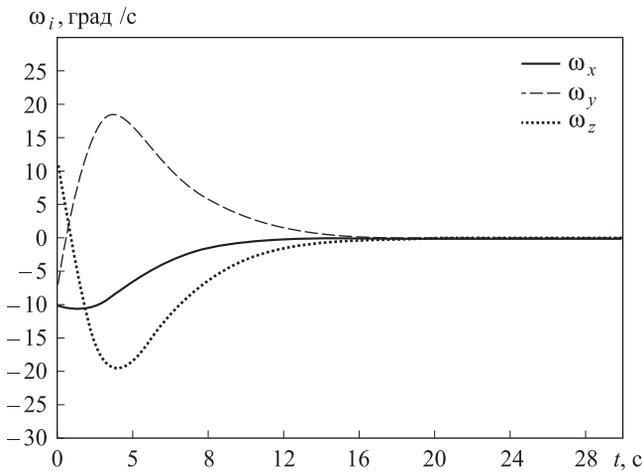


Рис. 4. ПП для компонент вектора угловой скорости

Заключение. В работе с применением методов точного размещения полюсов и модального управления при наличии детерминированных внешних возмущений решена задача управления ориентацией КА в элементах кватернионов. Предложен способ поиска численных значений полюсов, обеспечивающих минимальное время программного разворота при наличии верхних ограничений на модуль и градиенты угловой скорости вращения аппарата. Получены приближенные эмпирические выражения, позволяющие для всех возможных начальных значений кватерниона, выраженного через угол конечного поворота, определять необходимые значения корней. В детерминированной постановке, так же как и в [9], рассмотрен пример численного моделирования процесса управления ориентацией на конечном

этапе приземления КА, который показал, что предлагаемый закон управления позволяет за время работы двигательной установки привести КА в вертикальное угловое положение и обеспечить безопасное касание аппаратом поверхности посадочного полигона.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубов Н.Е. Оптимальное управление терминальной переориентацией КА на основе алгоритма с прогнозирующей моделью. *Космич. исслед.*, 1991, т. 29, вып. 3, с. 340–351.
- [2] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2012, № 1, с. 92–108.
- [3] Микрин Е.А., ред. *Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов*. Москва, Наука, 2006, 579 с.
- [4] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов*. Москва, Наука, 1974. 600 с.
- [5] Мартынов Н.Н. *Введение в Matlab 6*. Москва, Кулиц-образ, 2002. 352 с.
- [6] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Алгебраические и матричные методы в теории линейных ММО-систем. *Вестник ИГЭУ*, 2005, № 5, с. 196–240.
- [7] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением КА. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2013, № 2, с. 148–162.
- [8] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Наука, 1988. 560 с.
- [9] Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А. Синтез развязывающих законов управления угловым движением возвращаемого аппарата с посадочной твердотопливной двигательной установкой, обеспечивающих минимизацию времени переходного процесса. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2013, № 3, с. 161–172.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А. Применение кватернионов в модальном управлении ориентацией космических аппаратов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1074.html>

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК "Энергия" имени С.П. Королёва», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космическими аппаратами. e-mail: Nikolay.Zubov@rscf.ru

Лапин Алексей Владимирович — аспирант ОАО «РКК "Энергия" имени С.П. Королёва». Автор 3 работ в области проблем управления космическими аппаратами.

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО «РКК "Энергия" имени С.П. Королёва», зав. кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 работ в области проблем управления космическими аппаратами.