

Материальное уравнение гранулярного сверхпроводника

© М.В. Белодедов¹, Л.П. Ичкитидзе²

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

² МИЭТ, Москва, Зеленоград, 124498, Россия

Проникновение магнитного поля в массивные образцы высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) традиционно рассматривается с позиций электродинамики сверхпроводников второго рода, хотя ВТСП является множественной джозефсоновской средой. Путем усреднения микроскопических параметров джозефсоновской среды в работе выводится материальное уравнение такой среды. Показывается, что общий вид предлагаемого материального уравнения практически не зависит от закона распределения сверхпроводящих гранул по размерам. На основе полученного материального уравнения исследуется проникновение магнитного поля в джозефсоновскую среду. Моделируются также вихревые решения полученного уравнения и делается вывод о том, что в ВТСП должны реализовываться магнитные вихри, содержащие один квант магнитного потока.

Ключевые слова: джозефсоновская среда, материальное уравнение, магнитные вихри, гипервихри, феноменологические параметры.

Введение. Отклик на внешнее магнитное поле и характер его проникновения является основной отличительной чертой различных сверхпроводящих сред, привлекающей интерес исследователей во все времена, начиная с открытия сверхпроводимости. Чрезвычайно сложным и запутанным является процесс проникновения магнитного поля в сверхпроводники второго рода, которыми являются практически все сверхпроводящие сплавы и соединения. Как было впервые показано в [1], поле проникает в них в виде одиночных вихрей, каждый из которых несет отдельный квант магнитного потока $\Phi_0 = hc/2e = 2,07 \cdot 10^{-7}$ Гс·см². Название «вихрь» закрепилось за этими образованиями благодаря тому факту, что их нормальная (несверхпроводящая) сердцевина окружена вихревыми сверхпроводящими токами, экранирующими от магнитного поля остальной массив сверхпроводника. Аналогом абрикосовского вихря является джозефсоновский вихрь [2], наблюдающийся в распределенных джозефсоновских переходах. Как и в абрикосовском, в джозефсоновском вихре имеет место концентрация магнитного поля, экранируемого от проникновения в глубь сверхпроводника лондоновскими поверхностными токами, а в глубь распределенного перехода — джозефсоновскими токами. В отличие от абрикосовского, джозефсоновский вихрь не имеет нормальной сердцевины, но содержит также только одиночный квант магнитного потока.

С открытием керамических высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) резко повысилась актуальность исследования гранулярных сверхпроводников, представляющих собой среду, состоящую из большого числа сверхпроводящих гранул малого размера, образующих в местах соприкосновения друг с другом туннельные переходы со свойствами джозефсоновских контактов [3]. Качественная картина проникновения магнитного поля в такую среду была предложена в [4, 5]. Она состоит в том, что магнитное поле проникает в пространство между гранулами, как в распределенный переход, и образует там джозефсоновский вихрь. Но, поскольку таких переходов много и они соединены между собой случайным образом, такой вихрь образует двумерную структуру, захватывающую большое количество гранул. Такой вихрь получил название «гипервихрь» (ГВ).

Свойства и параметры ГВ (размер, форма, содержащийся магнитный поток, динамическое поведение и др.) активно изучаются в экспериментальных и теоретических работах [6–11]. Например, некоторые исследователи считают, что ГВ полностью аналогичен обычному АВ, за исключением отсутствия нормальной сердцевины и существенно бóльших размеров (что приводит к существенно меньшим значениям критических полей).

В настоящей работе предлагается модель образования магнитных ГВ и приводятся оценки их основных параметров в гранулярном сверхпроводнике в виде джозефсоновской среды с сильными разбросами размеров и форм гранул.

1. Материальное уравнение гранулярного сверхпроводника.

Будем рассматривать гранулярный сверхпроводник как множественную джозефсоновскую среду, образованную сверхпроводящими гранулами и джозефсоновскими переходами в местах их контактов. Обозначим через $\theta(\mathbf{r}, t)$ фазу волновой функции сверхпроводящих электронов. В предположении, что размеры гранул существенно превышают лондоновскую глубину проникновения, функция $\theta(\mathbf{r}, t)$ внутри гранул связана с вектор-потенциалом магнитного поля \mathbf{A} уравнением Гинзбурга — Ландау [12]:

$$\nabla\theta = \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}$$

и претерпевает разрыв на джозефсоновском переходе между гранулами. Построим гладкую функцию $\tilde{\theta}(\mathbf{r}, t)$, совпадающую с $\theta(\mathbf{r}, t)$ в центрах гранул. Очевидно, что для любого замкнутого контура должно выполняться условие

$$\oint \nabla\tilde{\theta}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = 2\pi m, \quad m \text{ — целое.} \quad (1)$$

Из условия (1) следует, что ротор функции $\nabla\tilde{\theta}(\mathbf{r})$ равен нулю практически везде, за исключением, может быть, отдельных точек, где он равен $2\pi m$:

$$\operatorname{rot}(\nabla\tilde{\theta}) = \begin{cases} 0 & \text{почти везде;} \\ 2\pi m & \text{в отдельных точках.} \end{cases} \quad (2)$$

Вычислим разность фаз на джозефсоновском переходе с координатами \mathbf{r}_0 , образованном гранулами, центры которых имеют координаты \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j :

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} &= \theta(\mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)\nabla\theta - \left(\theta(\mathbf{r}_j) + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j)\nabla\theta \right) = \\ &= \theta(\mathbf{r}_i) - \theta(\mathbf{r}_j) + \nabla\theta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \tilde{\theta}(\mathbf{r}_i) - \tilde{\theta}(\mathbf{r}_j) - \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \\ &= \left(\nabla\tilde{\theta} - \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A} \right) (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \left(\nabla\tilde{\theta} - \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A} \right) \mathbf{a}_{i,j}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{a}_{i,j}$ — вектор, соединяющий центры рассматриваемых гранул.

Рассмотрим векторную величину $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\tilde{\theta}$. Она определяет разность фаз на джозефсоновском переходе:

$$\phi = -\frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{F}\mathbf{a}, \quad (3)$$

где \mathbf{a} — вектор, соединяющий центры гранул, образующих джозефсоновский переход. С другой стороны, магнитное поле \mathbf{B} может быть выражено через ротор вектора \mathbf{F} почти везде, за исключением отдельных точек (2):

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{rot}\left(\mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\tilde{\theta} \right) = \mathbf{B} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\operatorname{rot}(\nabla\tilde{\theta}). \quad (4)$$

Применим к рассматриваемому переходу резистивную модель [6, 13]:

$$I = I_c \sin \phi + \frac{\Phi_0}{2\pi c} \left(\frac{1}{R} \dot{\phi} + C \ddot{\phi} \right),$$

где I — ток через переход, I_c — величина его критического тока, R и C — его активное сопротивление и емкость.

С учетом (3) последнее выражение можно записать в виде

$$I = -I_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F}\mathbf{a}\right) - \frac{\mathbf{a}}{Rc} (\dot{\mathbf{F}} + RC\ddot{\mathbf{F}}). \quad (5)$$

Рассмотрим объем V , содержащий большое число гранул (и, соответственно, большое число N образованных между ними джозефсоновских контактов), но в то же время достаточно малый, чтобы положить внутри него $\mathbf{A} = \text{const}$. Будем считать, что токи I_k текут каждый на отрезке \mathbf{a}_k . Для вычисления средней плотности тока в объеме V предположим, что проводник длиной $a_k = |\mathbf{a}_k|$ имеет площадь сечения S_k , поэтому внутри него течет ток с плотностью $\mathbf{j}_k = \frac{\mathbf{a}_k I_k}{a_k S_k} = \mathbf{a}_k \frac{I_k}{a_k S_k} = \frac{\mathbf{a}_k I_k}{V_k}$. Средняя в объеме V плотность тока, таким образом, равна:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \mathbf{j}_k V_k = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N I_k \mathbf{a}_k = \frac{1}{V} N \langle I\mathbf{a} \rangle = \rho \langle I\mathbf{a} \rangle, \quad (6)$$

где ρ — средняя концентрация джозефсоновских переходов.

В полученное выражение входит величина $\langle I\mathbf{a} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle I\mathbf{a} \rangle &= - \left\langle \mathbf{a} \left(I_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F}\mathbf{a}\right) + \frac{\mathbf{a}}{Rc} (\dot{\mathbf{F}} + RC\ddot{\mathbf{F}}) \right) \right\rangle = \\ &= - \left\langle I_c \mathbf{a} \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F}\mathbf{a}\right) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{Rc} \mathbf{a} (\mathbf{a} (\dot{\mathbf{F}} + RC\ddot{\mathbf{F}})) \right\rangle. \end{aligned}$$

При вычислении приведенных средних значений естественно предположить, что величины I_c , R и C являются статистически независимыми, поэтому в последнем выражении их можно заменить на средние значения, обозначаемые теми же символами:

$$\langle I\mathbf{a} \rangle = -I_c \left\langle \mathbf{a} \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F}\mathbf{a}\right) \right\rangle - \frac{1}{Rc} \langle \mathbf{a} (\mathbf{a}\dot{\mathbf{F}}) \rangle - \frac{C}{c} \langle \mathbf{a} (\mathbf{a}\ddot{\mathbf{F}}) \rangle. \quad (7)$$

Для вычисления средних значений в выражении (7) предположим, что все направления вектора \mathbf{a} равновероятны, а его модуль имеет распределение $w(a)$. Проведем усреднение в сферической системе координат с осью z , направленной вдоль вектора \mathbf{F} , полярным углом γ и азимутальным углом φ . При выполнении сформулированных предположений средние значения выражения (7) определяются только законом распределения z -компоненты вектора \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{a} \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F} \mathbf{a} \right) \right\rangle &= \frac{\mathbf{F}}{F} \int_{-\infty}^{\infty} a_z \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F a_z \right) w(a_z) da_z; \\ \left\langle \mathbf{a} (\mathbf{a} \dot{\mathbf{F}}) \right\rangle &= \frac{\dot{\mathbf{F}}}{\dot{F}} \int_{-\infty}^{\infty} a_z (\dot{F} a_z) w(a_z) da_z = \dot{\mathbf{F}} \int_{-\infty}^{\infty} a_z^2 w(a_z) da_z; \\ \left\langle \mathbf{a} (\mathbf{a} \ddot{\mathbf{F}}) \right\rangle &= \ddot{\mathbf{F}} \int_{-\infty}^{\infty} a_z^2 w(a_z) da_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Необходимо отметить, что в рассматриваемом случае закон распределения z -компоненты вектора \mathbf{a} $w(a_z)$ связан с законом распределения его модуля $w(a)$ соотношением

$$w(a_z) = \int_{a_z}^{\infty} \frac{w(a)}{2a} da. \quad (9)$$

Рассмотрим некоторые, наиболее типичные, виды распределения вектора \mathbf{a} и соответствующие им законы распределения $w(a_z)$.

1. Абсолютное значение вектора \mathbf{a} равно \bar{a} . Это означает, что все гранулы в рассматриваемой среде имеют диаметр \bar{a} . В этом случае $w(a_z) = 1/(2\bar{a})$, и выражения (8) принимают вид

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{a} \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F} \mathbf{a} \right) \right\rangle &= \frac{\mathbf{F}}{F} \times \bar{a} \left[\left(\frac{\Phi_0}{2\pi F \bar{a}} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) - \frac{\Phi_0}{2\pi F \bar{a}} \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right]; \\ \left\langle \mathbf{a} (\mathbf{a} \dot{\mathbf{F}}) \right\rangle &= \frac{1}{3} \dot{\mathbf{F}} \bar{a}^2; \\ \left\langle \mathbf{a} (\mathbf{a} \ddot{\mathbf{F}}) \right\rangle &= \frac{1}{3} \ddot{\mathbf{F}} \bar{a}^2. \end{aligned} \quad (10a)$$

2. Модуль вектора \mathbf{a} имеет равномерное распределение со средним значением \bar{a} : $w(a) = 1/(2\bar{a})$, где $0 \leq a \leq 2\bar{a}$. Используя (9), нетрудно получить, что в этом случае $w(a_z) = \frac{1}{4\bar{a}} \ln \left| \frac{2\bar{a}}{a_z} \right|$ при $0 \leq |a_z| \leq 2\bar{a}$.

Выражения (8) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{a} \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F} \mathbf{a} \right) \right\rangle &= \frac{\mathbf{F}}{F} \times \frac{\bar{a}}{2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi F \bar{a}} \right)^2 \left[\text{Si} \left(2 \frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) - \sin \left(2 \frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right]; \\ \left\langle \mathbf{a} (\mathbf{a} \dot{\mathbf{F}}) \right\rangle &= \frac{4}{9} \dot{\mathbf{F}} \bar{a}^2; \\ \left\langle \mathbf{a} (\mathbf{a} \ddot{\mathbf{F}}) \right\rangle &= \frac{4}{9} \ddot{\mathbf{F}} \bar{a}^2, \end{aligned} \quad (10b)$$

где через Si обозначена функция интегральный синус:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

3. Диаметр гранул имеет равномерное распределение, чему соответствует $w(a) = a/\bar{a}^2$ при $0 \leq a \leq \bar{a}$ и $w(a) = 2/\bar{a} - a/\bar{a}^2$ при $\bar{a} \leq a \leq 2\bar{a}$. В этом случае закон распределения z -компоненты вектора \mathbf{a} имеет вид

$$w(a_z) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{a}} \left(\ln 2 - \left| \frac{a_z}{2\bar{a}} \right| \right) & \text{при } 0 \leq |a_z| \leq \bar{a}; \\ \frac{1}{\bar{a}} \left(\ln \left| \frac{2\bar{a}}{a_z} \right| + \left| \frac{a_z}{2\bar{a}} \right| - 1 \right) & \text{при } |a_z| \geq \bar{a}, \end{cases}$$

чему соответствует следующий вид выражений (8):

$$\left\langle \mathbf{a} \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F} \mathbf{a} \right) \right\rangle = \frac{\mathbf{F}}{F} \times 2\bar{a} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi F \bar{a}} \right)^3 \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \left(\text{Si} \left(2 \frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) - \text{Si} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right) + 2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right]; \quad (10\text{B})$$

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{a}\dot{\mathbf{F}}) \rangle = \frac{7}{18} \dot{\mathbf{F}} \bar{a}^2;$$

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{a}\ddot{\mathbf{F}}) \rangle = \frac{7}{18} \ddot{\mathbf{F}} \bar{a}^2.$$

4. Абсолютное значение вектора \mathbf{a} имеет максвелловское распределение со средним значением \bar{a} :

$$w(a) = \frac{32}{\bar{a}^3 \pi^2} x^2 \exp \left(-\frac{4x^2}{\bar{a}^2 \pi} \right).$$

В этом случае z -компонента данного вектора распределена по нормальному закону:

$$w(a_z) = \frac{2}{\bar{a}\pi} \exp \left(-\frac{4a_z^2}{\bar{a}^2 \pi} \right)$$

и выражения (8) принимают вид:

$$\left\langle \mathbf{a} \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F} \mathbf{a} \right) \right\rangle = \frac{\mathbf{F}}{F} \times \bar{a} \frac{\pi}{8} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \exp \left[-\frac{\pi}{16} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right)^2 \right]; \quad (10\text{r})$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}(\mathbf{a}\dot{\mathbf{F}}) \rangle &= \frac{\pi}{8} \dot{\mathbf{F}}\bar{a}^2; \\ \langle \mathbf{a}(\mathbf{a}\ddot{\mathbf{F}}) \rangle &= \frac{\pi}{8} \ddot{\mathbf{F}}\bar{a}^2.\end{aligned}\tag{10д}$$

Следует отметить, что случай нормального распределения размеров гранул совпадает с рассмотренным случаем.

Соотношения (6), (7) и (8) дают основание записать материальное уравнение рассматриваемой среды:

$$\mathbf{j} = -\frac{\mathbf{F}}{F} I_c \rho \bar{a} M(F) - \frac{\rho}{Rc} \eta \dot{\mathbf{F}}\bar{a}^2 - \frac{C\rho}{c} \eta \ddot{\mathbf{F}}\bar{a}^2,\tag{11}$$

где зависимость $M(F)$ определяется законом распределения гранул по размерам:

$$M(F) = \frac{1}{\bar{a}} \int_{-\infty}^{\infty} a_z \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F a_z\right) w(a_z) da_z,$$

в четырех рассмотренных случаях в соответствии с выражениями (10а–10д) имеет вид:

1. $M(F) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi F\bar{a}}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) - \frac{\Phi_0}{2\pi F\bar{a}} \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right);$
2. $M(F) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi F\bar{a}}\right)^2 \left[\text{Si}\left(2\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) - \sin\left(2\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) \right];$
3. $M(F) = 2 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi F\bar{a}}\right)^3 \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a} \left(\text{Si}\left(2\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) - \text{Si}\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) \right) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) \right];$
4. $M(F) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right) \exp\left[-\frac{\pi}{16} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F\bar{a}\right)^2\right]$

и графически представлена на рис. 1 и рис. 2, а коэффициент η , определяемый тем же законом распределения:

$$\eta = \frac{1}{\bar{a}^2} \int_{-\infty}^{\infty} a_z^2 w(a_z) da_z,$$

в рассмотренных случаях имеет значения:

1. $\eta = 1/3$;
2. $\eta = 4/9$;
3. $\eta = 7/18$;
4. $\eta = p/8$.

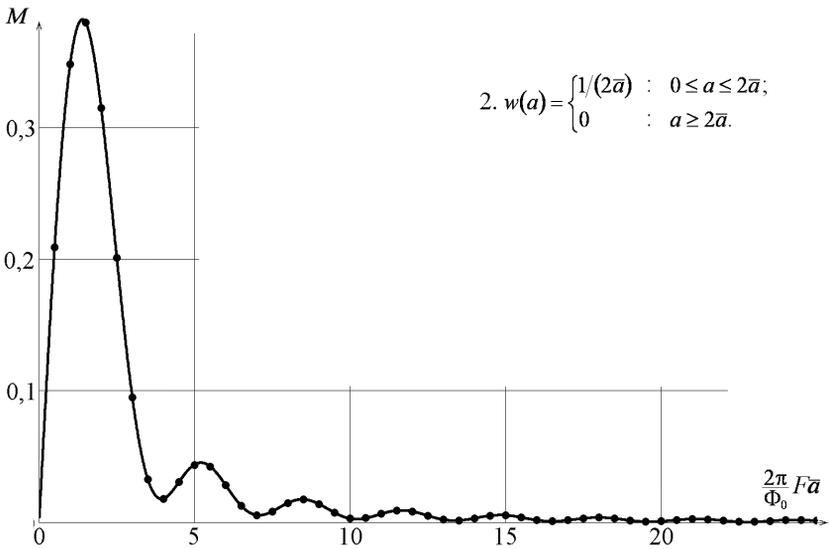
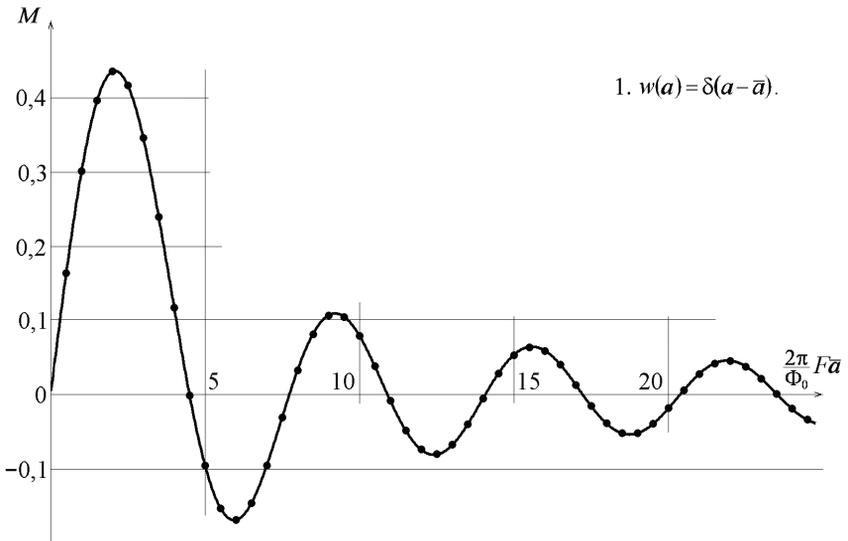


Рис. 1 (начало). Зависимость $M(F)$ для различных видов распределения величины a . Точками отмечены результаты непосредственного вычисления величины $\langle a \sin(2\pi Fa/E_0) \rangle$ по $10^8 \dots 10^9$ реализациям

Нетрудно показать, что зависимость $M(F)$ при малых значениях F стремится к линейной:

$$\begin{aligned} \lim_{F \rightarrow 0} M(F) &= \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{a}} \int_{-\infty}^{\infty} a_z \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F a_z\right) w(a_z) da_z = \\ &= \frac{1}{\bar{a}} \frac{2\pi}{\Phi_0} F \int_{-\infty}^{\infty} a_z^2 w(a_z) da_z = F \frac{2\pi}{\Phi_0} \eta \bar{a}, \end{aligned}$$

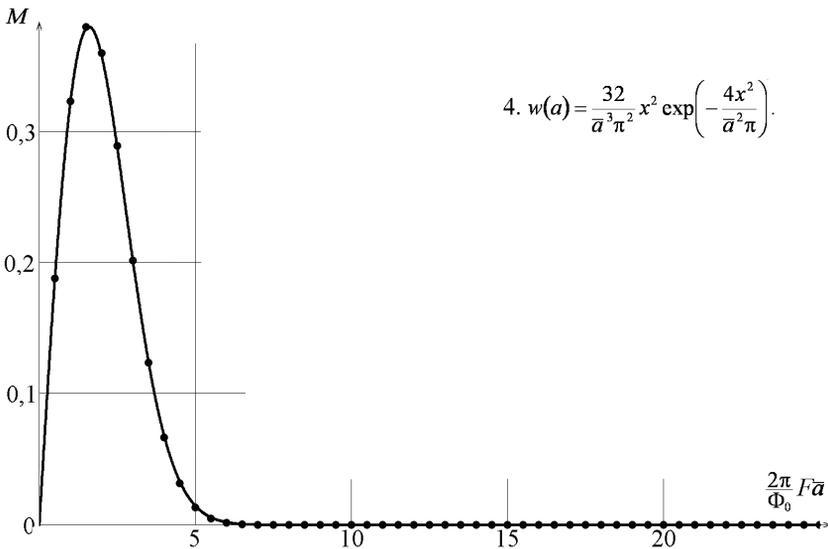
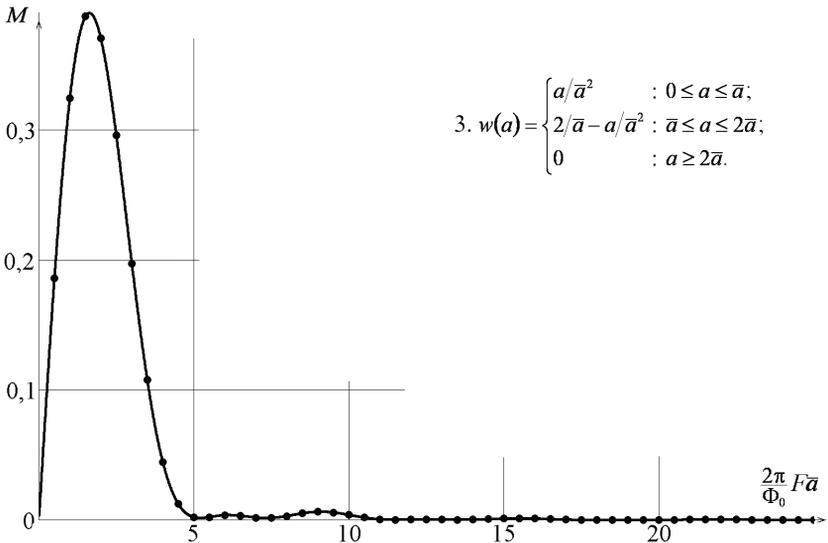


Рис. 1 (окончание). Зависимость $M(F)$ для различных видов распределения величины a . Точками отмечены результаты непосредственного вычисления величины $\langle a \sin(2\pi F a / E_0) \rangle$ по $10^8 \dots 10^9$ реализациям

из чего следует, что при малых значениях F в стационарном случае материальное уравнение (11) принимает вид

$$\mathbf{j} = -\frac{\mathbf{F}}{F} \frac{2\pi}{\Phi_0} I_c \rho \bar{a}^2 \eta F. \quad (12)$$

Рассмотрим задачу о проникновении магнитного поля в полубесконечную ($x > 0$) среду рассматриваемого вида. С учетом уравнения Максвелла $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{rot rot } \mathbf{F} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}$ и материального уравнения (12)

проникновение магнитного поля в среду описывается уравнением

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \mathbf{F} \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{4\pi\mu}{c} I_c \rho \bar{a}^2 \eta,$$

которое имеет решение $F = F_0 \exp(-x/\lambda_M)$, где λ_M обозначена характерная глубина проникновения магнитного поля:

$$\lambda_M = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{c}{4\pi\mu I_c \rho \bar{a}^2 \eta}}.$$

В последних выражениях величина μ имеет смысл магнитной проницаемости среды, обусловленной только мейсснеровскими токами отдельных гранул.

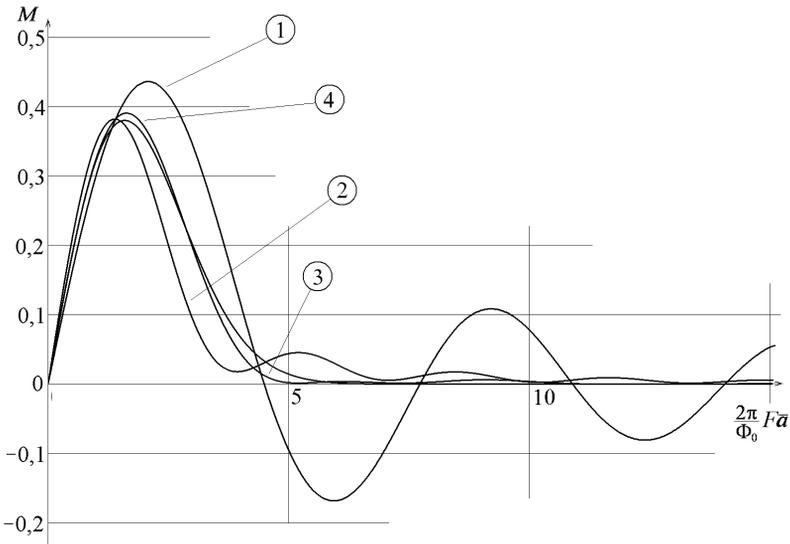


Рис. 2. Сравнение материальных зависимостей гранулярных сверхпроводящих сред с различными законами распределения гранул по размерам

Материальное уравнение (11) при условии малости магнитного поля приводит к уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \frac{1}{\lambda_M^2} \mathbf{F} + \frac{1}{v_M^2} \frac{1}{RC} \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{v_M^2} \ddot{\mathbf{F}},$$

где введен новый параметр $v_M = \frac{c}{2\bar{a}\sqrt{\pi\mu C\rho\eta}} = \lambda_M \sqrt{\frac{2\pi cI_c}{\Phi_0 C}}$, имеющий размерность скорости.

Таким образом, множественная джозефсоновская среда описывается материальным уравнением

$$\mathbf{j} = -\frac{\mathbf{F}}{F} I_c \rho \bar{a} M(F) - \frac{c}{4\pi\mu} \frac{1}{v_M^2} \frac{1}{RC} \dot{\mathbf{F}} - \frac{c}{4\pi\mu} \frac{1}{v_M^2} \ddot{\mathbf{F}}, \quad (13)$$

а распределение магнитного поля в ней подчиняется уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}}{F} \frac{1}{\bar{a}\eta} \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{\lambda_M^2} M(F) + \frac{1}{v_M^2} \frac{1}{RC} \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{v_M^2} \ddot{\mathbf{F}}. \quad (14)$$

Рис. 2 демонстрирует, что гранулярные среды с существенно различающимися законами распределения размеров гранул описываются приблизительно одинаковыми материальными уравнениями, особенно на начальном участке зависимости. Несколькo обособленное положение занимает только «чрезмерно идеальный» случай гранул одинаковых размеров.

2. Магнитные вихри в гранулярном сверхпроводнике. Рассмотрим стационарные радиально симметричные решения уравнения (14). Будем при этом считать, что магнитное поле имеет только компоненту $B_z = B(r)$, постоянную по координате z , т. е. в полярной системе координат вектор \mathbf{F} имеет только одну отличную от нуля компоненту $F_\varphi = F(r)$. Уравнение (14) при принятых условиях будет иметь вид

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rF) \right) = \frac{1}{\bar{a}\eta} \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{\lambda_M^2} M(F),$$

причем магнитное поле связано с величиной F соотношением

$$B = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rF)$$

везде, кроме точки $r = 0$.

После введения безразмерных величин

$$\tilde{r} = \frac{r}{\lambda_M}, \quad \tilde{F} = \frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a}, \quad \tilde{B} = \frac{2\pi \bar{a} \lambda_M}{\Phi_0} B$$

последние уравнения существенно упростятся:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{F}) \right) &= \frac{1}{\eta} M(F); \\ \tilde{B} &= \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{F}). \end{aligned} \quad (15)$$

В четырех рассмотренных случаях первое из уравнений (15) принимает вид

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{F}) \right) &= \frac{3}{\tilde{F}^2} (\sin(\tilde{F}) - \tilde{F} \cos(\tilde{F})); \\ 2. \quad \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{F}) \right) &= \frac{9}{8} \frac{1}{\tilde{F}^2} [\text{Si}(2\tilde{F}) - \sin(2\tilde{F})]; \\ 3. \quad \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{F}) \right) &= \\ &= \frac{36}{7} \frac{1}{\tilde{F}^3} [\tilde{F} (\text{Si}(2\tilde{F}) - \text{Si}(\tilde{F})) + 2 \cos^2(\tilde{F}) - 2 \cos(\tilde{F})]; \\ 4. \quad \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{F}) \right) &= \tilde{F} \exp\left(-\frac{\pi}{16} \tilde{F}^2\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Проинтегрируем величину F по замкнутому круговому контуру с центром в точке $r = 0$ и радиусом r , учитывая соотношение (4):

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} d\mathbf{l} &= \oint \left(\mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \tilde{\theta} \right) d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint \nabla \tilde{\theta} d\mathbf{l} = \\ &= \int_S \text{rot} \mathbf{A} ds - n\Phi_0 = \pi r^2 B - n\Phi_0, \end{aligned}$$

где n — любое целое число. Поскольку в предполагаемых условиях ($F_z = F_\phi = 0$, $F_r = F(r)$) справедливо утверждение $\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint F dl = 2\pi r F$, последнее выражение при устремлении радиуса контура к нулю приводит к условию:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (rF) = n \frac{\Phi_0}{2\pi},$$

которое для безразмерных величин принимает вид

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\tilde{r}\tilde{F}) = n \frac{\bar{a}}{\lambda_M}. \quad (17a)$$

Полученное условие вкупе с условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{B} = 0 \quad (17b)$$

может быть использовано для поиска уединенных вихревых решений уравнения (16). Семейства решений уравнения (16) с приведенными граничными условиями (17) для случая $\bar{a}/\lambda_M = 0,1$ и для различных значений n приведены на рис. 3. Различным значениям n соответствуют различные значения напряженности магнитного поля в центре вихря и полного магнитного потока, содержащегося в вихре. Интересно отметить, что, несмотря на неограниченность функции $F(r)$ при $r \rightarrow 0$, магнитное поле в центре принимает вполне конечное значение, практически не зависящее от закона распределения гранул по размерам. Кроме того, в отличие от абрикосовских, в центре обнаруженных вихрей сверхпроводящее состояние не разрушается.

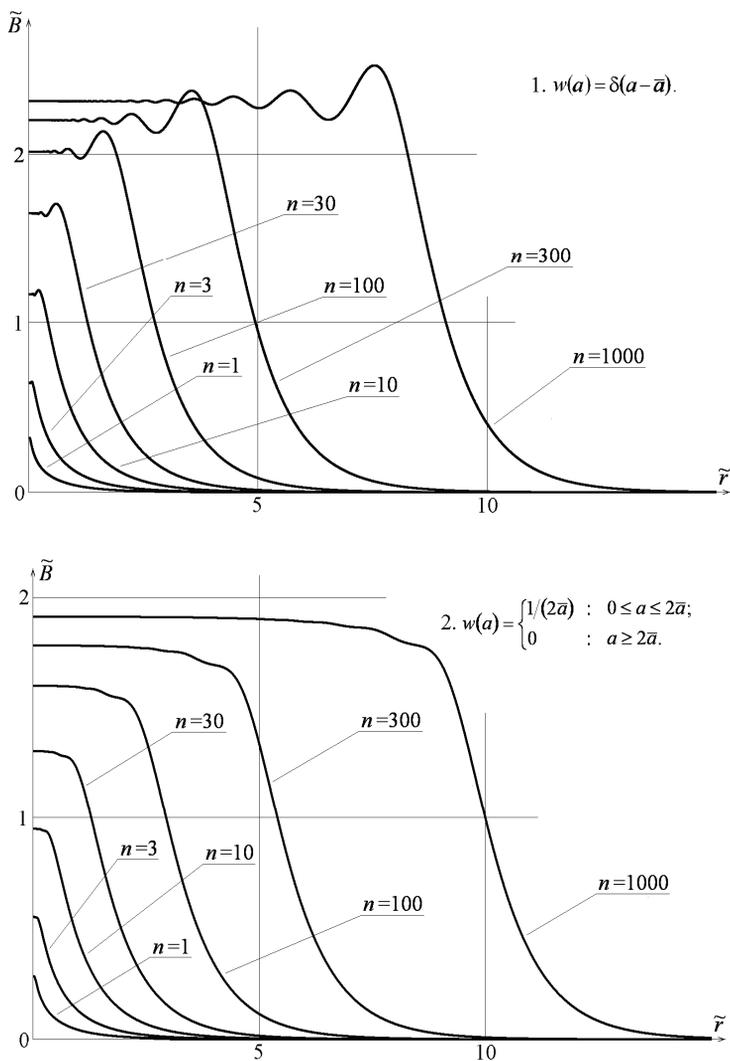


Рис. 3 (начало). Семейства решений уравнения (16) с граничными условиями (17) при $\bar{a}/\lambda_M = 0,1$ и различных значениях параметра n

Наиболее важное практическое значение имеет вопрос о магнитном потоке, содержащемся в одном вихре. Для ответа на него достаточно проинтегрировать полученные решения (рис. 3):

$$\Phi = 2\pi \int_0^{\infty} B(r) r dr = \Phi_0 \frac{\lambda_M}{\bar{a}} \int_0^{\infty} \tilde{B}(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (18)$$

Результаты интегрирования при разных значениях параметров n и λ_M/\bar{a} и для различных законов распределения величины a приведены в табл. 1.

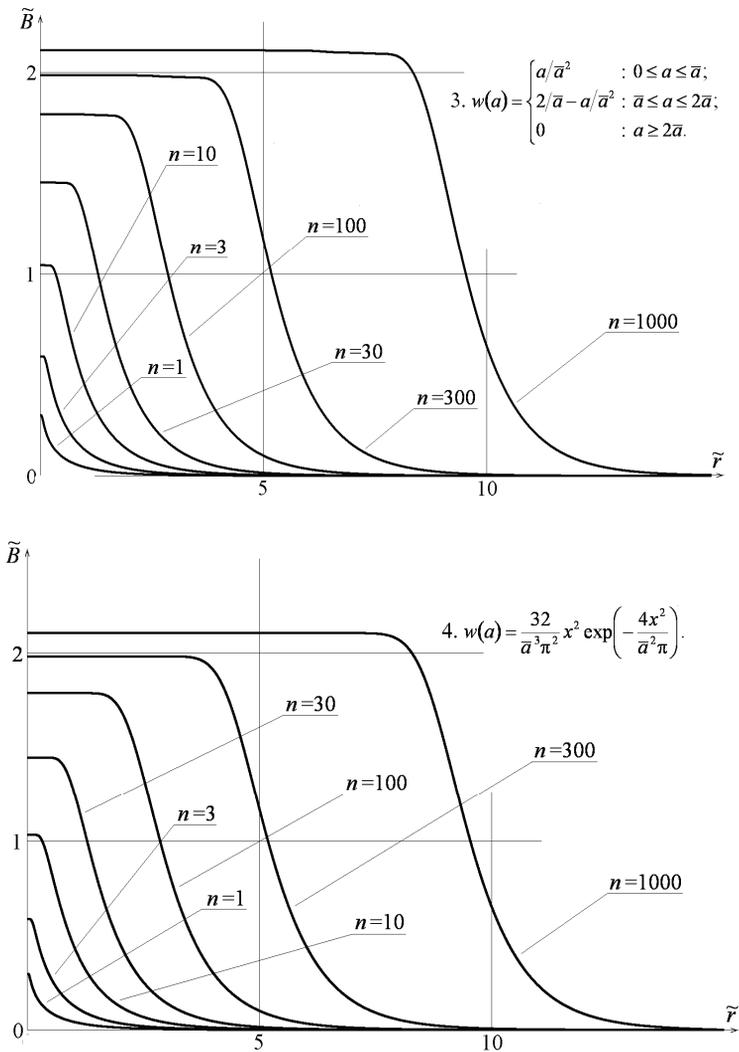


Рис. 3 (окончание). Семейства решений уравнения (16) с граничными условиями (17) при $\bar{a}/\lambda_M = 0,1$ и различных значениях параметра n

Магнитный поток, содержащийся в вихре (в единицах Φ_0) при разных значениях параметров n и λ_M/\bar{a} . Моделирование проведено для разных законов распределения $w(a)$

λ_M/\bar{a}	n					
	1	3	10	30	100	300
1. $w(a) = \delta(a - \bar{a})$.						
3	1,0017	2,9998	10,0002	30,0001	99,9985	299,8948
10	0,9981	3,0026	9,9992	30,0002	99,9902	300,0020
30	1,0117	2,9943	10,0164	29,9974	100,0019	300,2763
100	0,9529	2,9774	9,9819	30,0262	99,9914	300,0020
2. $w(a) = 1/\bar{a}$.						
3	1,0006	2,9995	10,0009	29,9999	99,9972	299,7107
10	0,9959	3,0058	9,9982	29,9985	99,9997	299,9925
30	1,0110	2,9876	10,0055	29,9904	100,0090	299,9990
100	1,0409	3,0358	9,9584	30,0574	99,9637	299,9845
3. $w(a) = \begin{cases} a/\bar{a}^2 & (0 \leq a \leq \bar{a}); \\ 2/\bar{a} - a/\bar{a}^2 & (\bar{a} \leq a \leq 2\bar{a}). \end{cases}$						
3	0,9992	2,9995	10,0005	30,0005	199,9958	299,8287
10	0,9992	3,0005	9,9983	30,0016	200,0032	299,9947
30	1,0008	3,0030	10,0003	29,9949	200,0090	300,0052
100	1,0152	3,0190	9,9927	30,0051	99,9819	299,5572
4. $w(a) = \frac{32}{\bar{a}^3 \pi^2} x^2 \exp\left(-\frac{4x^2}{\bar{a}^2 \pi}\right)$.						
3	1,0003	3,0000	10,0005	29,9997	99,9954	299,8255
10	1,0014	2,9977	9,9998	29,9995	99,9983	299,9884
30	1,0099	3,0042	10,0027	29,9992	100,0045	299,9964
100	1,0077	3,0398	10,0139	29,9767	99,9976	299,9949

Несмотря на относительно невысокую точность вычислений, для решения дифференциального уравнения (16) использовалась разностная схема первого порядка точности, а интегрирование (18) проводилось методом трапеций — результаты табл. 1 позволяют сделать достаточно ожидаемый вывод: магнитный поток, содержащийся в вихре, не зависит ни от закона распределения размеров гранул (по крайней мере, в пределах рассмотренных четырех законов распределения), ни от параметра \bar{a}/λ_M , и кратен величине кванта магнитного потока Φ_0 .

Для того чтобы определить, какое же из множества решений рис. 3 (при заданном материальном уравнении $M(F)$) реализуется на практике, необходимо вычислить их полную энергию, которая складывается из энергии магнитного поля и внутренней энергии

джозефсоновских переходов. Одиночный переход обладает энергией [12]

$$E_{\text{дж}} = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c (1 - \cos \phi),$$

поэтому рассматриваемая среда (при учете соотношения (3)) имеет плотность джозефсоновской энергии

$$W_{\text{дж}} = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \rho \left(1 - \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{F} \mathbf{a} \right) \right\rangle \right). \quad (19)$$

Последнее выражение при учете предположений, сделанных ранее при выводе соотношений (8), принимает вид

$$W_{\text{дж}} = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \rho \left(1 - \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F a_z \right) \right\rangle \right),$$

что позволяет получить плотность джозефсоновской энергии для четырех рассмотренных законов распределения гранул по размерам:

$$1. W_{\text{дж}} = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \rho \left(1 - \frac{\Phi_0}{2\pi F \bar{a}} \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right);$$

$$2. W_{\text{дж}} = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \rho \left(1 - \frac{\Phi_0}{4\pi F \bar{a}} \text{Si} \left(\frac{4\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right);$$

$$3. W_{\text{дж}} = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \rho \left(1 - \left(\frac{\Phi_0}{2\pi F \bar{a}} \right)^2 \left(1 + \cos \left(2 \frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right) - 2 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi F \bar{a}} \right) \left(\text{Si} \left(2 \frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) - \text{Si} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right) \right) \right);$$

$$4. W_{\text{дж}} = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \rho \left(1 - \exp \left(- \frac{\pi}{16} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F \bar{a} \right)^2 \right) \right).$$

Приведенные зависимости изображены на рис. 4, который демонстрирует, что зависимость плотности энергии джозефсоновских переходов от магнитного поля слабо изменяется при вариации закона распределения гранул по размерам, так же, как в случае с материальной зависимостью (рис. 2).

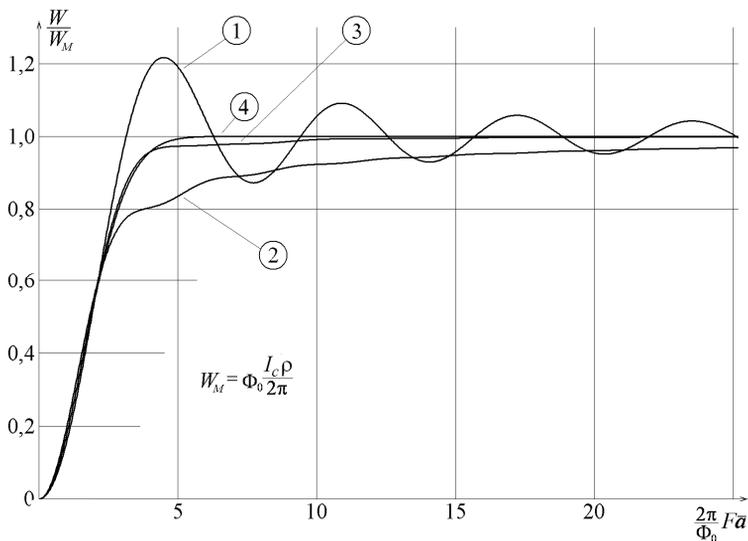


Рис. 4. Зависимость плотности энергии джозефсоновских переходов от вектор-потенциала магнитного поля (в единицах $W_M = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \rho$) при различных законах распределения гранул по размерам

Полная энергия вихря, приходящаяся на единицу его длины по координате z , складывается из энергии магнитного поля и энергии джозефсоновских переходов (19):

$$E = \int_V \frac{B^2(r)}{8\pi\mu} dx dy + \int_V W_{дж} (r) dx dy =$$

$$= \frac{1}{4\mu} \int_0^\infty r B^2(r) dr + \frac{1}{c} \Phi_0 I_c \rho \int_0^\infty r \left(1 - \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F a_z \right) \right\rangle \right) dr,$$

и для безразмерных величин имеет вид

$$E = \frac{B_M^2 \lambda_M^2}{4\mu} \left[\int_0^\infty \tilde{r} \tilde{B}^2(\tilde{r}) d\tilde{r} + \mu \frac{1}{\eta} \int_0^\infty \tilde{r} \left(1 - \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F a_z \right) \right\rangle \right) d\tilde{r} \right]. \quad (20)$$

Магнитные вихри, содержащие n квантов магнитного потока, будут на практике реализовываться только в том случае, если отношение их полной энергии к параметру n будет иметь минимальное значение. На рис. 5 приведены зависимости величин магнитной составляющей удельной полной энергии

$$\tilde{E}_M = \frac{1}{n} \int_0^\infty \tilde{r} \tilde{B}^2(\tilde{r}) d\tilde{r} \quad (21)$$

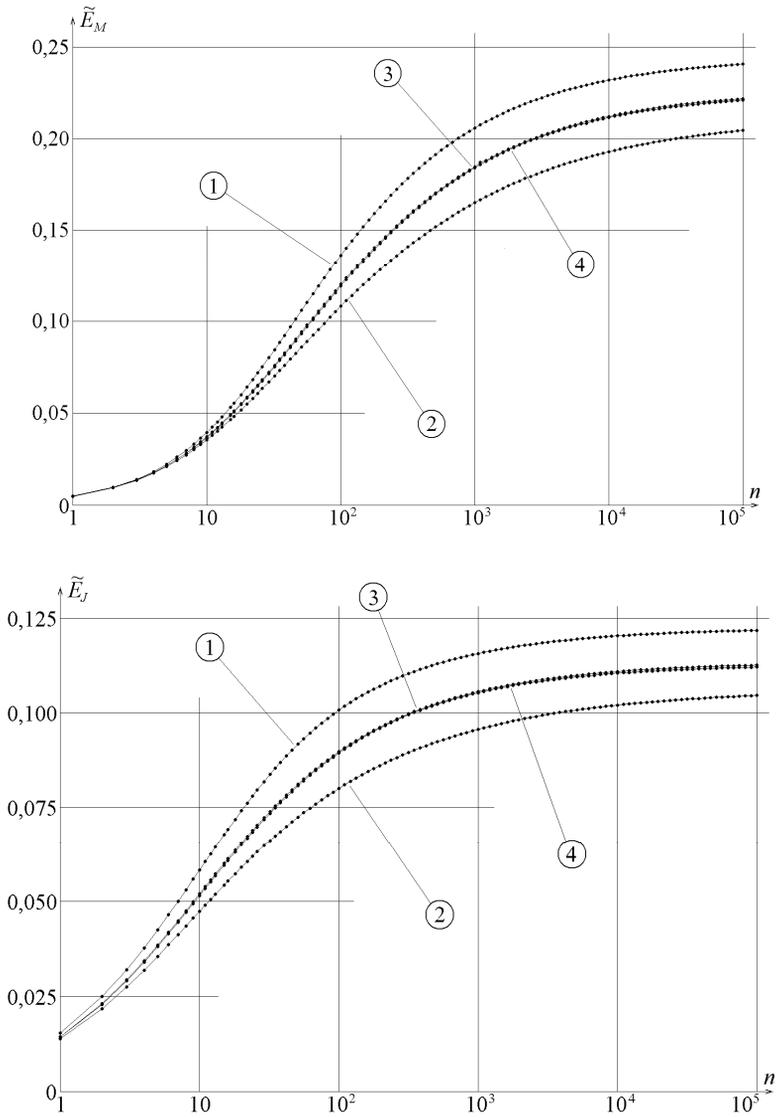


Рис. 5. Зависимость магнитной и джозефсоновской составляющих удельной полной энергии вихря от параметра n . Зависимости приведены для четырех рассматриваемых законов распределения величины a

и ее джозефсоновской составляющей

$$\tilde{E}_J = \frac{1}{n} \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} \tilde{r} \left(1 - \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} F a_z \right) \right\rangle \right) d\tilde{r} \quad (22)$$

от величины параметра n . Зависимости (21) и (22) монотонно растут с ростом целочисленного параметра n , из чего следует, что удельная полная энергия вихрей

$$E = \frac{B_M^2 \lambda_M^2}{4\mu} (\tilde{E}_M + \mu \tilde{E}_J)$$

также монотонно растет с ростом n . Это означает, что минимум удельной полной энергии реализуется при наименьшем значении $n = 1$, соответствующем, как было показано, вихрям, несущим одиночные кванты магнитного потока.

Таким образом, в гранулярном сверхпроводнике независимо от закона распределения гранул по размерам должны наблюдаться одноквантовые магнитные вихри.

Заключение. Путем усреднения микроскопических параметров множественной джозефсоновской среды получено материальное уравнение, описывающее усредненные значения этих параметров и связывающее магнитное поле и плотность тока в такой среде. Важным фактом является весьма слабая зависимость полученного материального уравнения от закона распределения сверхпроводящих гранул по размерам, следовательно, предлагаемые материальные уравнения носят в значительной степени универсальный характер.

Полученные в результате моделирования магнитные вихри в множественной джозефсоновской среде, которой является керамический ВТСП, по-видимому, можно считать гипервихрями в [4, 5]. В результате проведенных исследований показано, что гипервихри должны содержать одиночные кванты магнитного потока, несмотря на то что в сложных джозефсоновских структурах возможно квантование магнитного потока с числом квантов, отличным от единицы, как это было показано ранее в [14, 26].

Дальнейшее изучение электродинамики гранулярных сверхпроводников — «джозефсоновской среды» — требует определения введенных величин таких, как λ_M и v_M , которые можно рассматривать как феноменологические параметры и которые могут существенно отличаться от аналогичных параметров сверхпроводников второго рода. Другой важной задачей является определение параметров рассматриваемой среды: первое и верхнее критические магнитные поля, критический ток, динамика процессов намагничивания, особенности резистивного состояния при различных значениях температуры и внешнего магнитного поля. Сформулированная программа исследований имеет большое практическое значение, так как для измерения слабых магнитных полей (≤ 10 пТл) используются керамические ВТСП образцы [15–25] и глубокое понимание физических механизмов магнитной материи в них улучшит характеристики магнетометров нового поколения и расширит области их применения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (контракт 10678к/19537 от 02.07.2012 г.).

Авторы выражают благодарность проф. Селищеву С.В. за поддержку данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абрикосов А.А. О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы. *ЖЭТФ*, 1957, т. 32, № 6, с. 1442–1452.
- [2] Ferrel R.A., Prange R.S. Self-field limiting of Josephson tunneling of superconducting electron pairs. *Phys. Rev. Letts.*, 1963, vol. 10, no. 11, pp. 479–481.
- [3] Bednorz J.G., Muller K.A. Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. *Z. Phys.*, 1986, vol. 64, pp. 189–193.
- [4] Сонин Э.Б. Теория джозефсоновской среды в ВТСП: вихри и критические магнитные поля. *Письма в ЖЭТФ*, 1988, т. 47, вып. 8, с. 415–418.
- [5] Сонин Э.Б., Таганцев А.К. Электродинамика джозефсоновской среды в высокотемпературных сверхпроводниках: импеданс в смешанном состоянии. *ЖЭТФ*, 1989, т. 95, вып. 3, с. 994–1004.
- [6] Игнатъев В.К., Негинский И.В. О низкополевой электродинамике гранулированных ВТСП. *Физ. низ. темпер.*, 2000, т. 26, № 4, с. 340–349.
- [7] Кузьмичев Н.Д. Критическое состояние среды Джозефсона. *Письма в ЖЭТФ*, 2001, т. 74, вып. 5, с. 291–295.
- [8] Милошенко В.Е., Шушлебин И.М., Калядин О.В. Нижние критические поля сверхпроводника Y-Ba-Cu-O. *Физ. твердого тела*, 2006, т. 48, вып. 3, с. 403–406.
- [9] Краснюк И.Б., Залуцкий М.В. Закономерности проникновения магнитного потока в модельные гранулированные сверхпроводники. *Физ. низ. темпер.*, 2007, т. 33, № 4, с. 416–424.
- [10] Кревсун А.В., Бондаренко С.И., Коверя В.П., Гнездилова Л.В. Влияние магнитного состояния гранулированной керамики YBa₂Cu₃O_{7-x} на ее магниторезистивные свойства. *Вопросы атомной науки и техники*, 2009, № 6, Серия: Вакуум, чистые материалы, сверхпроводники (18), с. 97–104.
- [11] Shablo A.A., Koverya V.P. and Bondarenko S.I. The displacement and annihilation of macroscopic regions with hypervortices in ceramic YBa₂Cu₃O_{7-x}. *Low Temp. Phys.*, 2010, vol. 36, no. 1, pp. 110–114.
- [12] Шмидт В.В. *Введение в физику сверхпроводников*. Москва, МЦНМО, 2000, XIV, 402 с.
- [13] Лихарев К.К., Ульрих Б.Т. *Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1978, 447 с.
- [14] Белодедов М.В., Черных С.В. О проникновении магнитного поля в гранулированный сверхпроводник. *Журн. технич. физики*, 2003, т. 73, вып. 2, с. 75–80.
- [15] Ichkitidze L.P. Weak magnetic field superconductor resistive sensors in comparison with semiconductor and magnetoresistive sensors. *Physica C.*, 2007, vol. 460–462, part 2, pp. 781–782.
- [16] L.P. Ichkitidze. Resistive film sensor of a weak magnetic field based on the (Bi,Pb)₂Sr₂Ca₂Cu₃O_x HTS ceramics. *Physica C.*, 2006, vol. 435, pp. 140–143.

- [17] Ичкитидзе Л.П. Резистивный датчик слабого магнитного поля на основе толстых пленок ВТСП-материалов. *Изв. РАН. Серия Физическая*, 2007, т. 71, № 8, с. 1180–1182.
- [18] Grigorashvili Y.E., Ichkitidze L.P., Volik N.N. Magnetomodulation sensor of weak magnetic field on HTS (Bi,Pb)2Sr₂Ca₂Cu₃O_x ceramics. *Physica C.*, 2006, vol. 435, pp. 136–139.
- [19] Ичкитидзе Л.П. Сверхпроводниковый пленочный датчик слабого магнитного поля с трансформатором магнитного потока. Пат. № 2289870 RU, приоритет от 22.06.2005.
- [20] Ичкитидзе Л.П., Миронюк А.Н. Топологический наноструктурированный пленочный сверхпроводниковый трансформатор магнитного потока. *Нано- и микросистемная техника*, 2012, № 1, с. 47–50.
- [21] Ichkitidze L.P., Mironyuk A.N. Superconducting film flux transformer for a sensor of magnetic field. *Physica C.*, 2012, vol. 472, issue 1, pp. 57–59.
- [22] Pannetier, M., Fermon, C., Le Goff, G., Simola J. and Kerr E. FemtoTesla Magnetic Field Measurement with Magnetoresistive Sensors. *Science*, 2004, vol. 304, no. 5677, pp. 1648–1650.
- [23] Faley M.I., Poppe U., Urban K., and Fagaly R.L. Noise analysis of DC SQUIDs with damped superconducting flux transformers. *Journal of Physics: Conference Series*, 2010, 234, 042009. doi:10.1088/1742-6596/234/4/04200.
- [24] Порохов Н.В., Левин Э.Е., Чухаркин М.Л., Раков Д.Н., Воробьева А.Е., Варлашкин А.В., Снигирев О.В. Высокотемпературные сверхпроводящие пленки на гибких подложках для трансформатора магнитного потока. *Радиотехника и электроника*, 2012, т. 57, № 10, с. 1128–1136.
- [25] Белодедов М.В., Черных С.В. Высококчувствительные магнитометры на основе ВТСП-керамики. *ИТЭ*, 2001, № 4, с. 157–161.
- [26] Белодедов М.В., Черный В.В. Квантование магнитного потока в сложных джозефсоновских структурах. *Инженерная физика*, 2007, № 1, с. 35–38.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Белодедов М.В., Ичкитидзе Л.П. Материальное уравнение гранулярного сверхпроводника. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1094.html>

Белодедов Михаил Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Системы обработки информации и управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: m.belodedov@mail.ru

Ичкитидзе Леван Павлович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник кафедры биомедицинских систем Московского государственного института электронной техники (МИЭТ). e-mail: leo852@inbox.ru