УДК 66.047+681.5+519.6

Моделирование и идентификация сложных систем

О.П. Петросян[1], А.К. Горбунов[1], А.Б. Кожевников[1],
Е.А. Горбунов[2], А.О.Петросян[1]

[1] КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия
[2] ОАО «КАДВИ», Калуга, 248018, Россия

Рассмотрены математическое моделирование и задачи идентификации класса объектов и систем, базирующихся на решении линейных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений первого рода, что приемлемо в методах спектральной оптимизации.

Ключевые слова: *линейные дифференциальные уравнения, спектральная оптимизация, автоматическое управление, автоматизированное управление, математическое отображение.*

Качество функционирования системы автоматического или автоматизированного управления во многом зависит от идентичности реальных преобразований входных физических или иных характеристик процесса принятому математическому преобразованию входных сигналов как некоторых функций [1, 2]. Чем точнее соответствуют значения выходных характеристик процесса выходным сигналам в математическом отображении, тем выше гарантии качественного функционирования системы управления.

В общем случае математическая модель процесса есть связь входного сигнала $y(t)$ объекта с его выходным сигналом $z(t)$ через некоторый оператор A_t, обеспечивающий математическое преобразование по аргументу t, т. е.

$$z(t) = A_t y(t). \tag{1}$$

При таком математическом описании объекта предполагается, что возмущение $y(t)$ и реакция $z(t)$ системы представляют собой детерминированные сигналы; кроме того, сам объект также является детерминированным, т. е. между входными и выходными сигналами существует однозначная функциональная зависимость. На практике часто эти условия не выполняются, возмущения и реакции являются случайными, а объект и исследуемый процесс — стохастическими. В этом случае математическое описание объекта должно быть стохастическим, т. е. входные и выходные сигналы — случайные функции неслучайных аргументов и природа математического оператора, преобразующего входные сигналы в выходные, также случайна.

Из приведенных определений намечаются различные подходы к описанию объектов: детерминированный, когда воздействие, объект и реакция представляются детерминированными, и стохастический, когда воздействие, объект и реакция представляются случайными. При этом следует отметить, что в случае, когда хотя бы одна из этих трех характеристик представляет собой случайную функцию, построение модели может быть осуществлено только вероятностными методами.

Если выбрана модель, т. е. выражение для оператора A_t, то задача идентификации состоит в определении (или уточнении) параметров этого оператора.

Приведем некоторые постановки задачи идентификации, изложенные и рассмотренные в работе [3] в зависимости от априорной информации и класса объектов. При этом будем придерживаться принятой в этой работе системы обозначений, адаптируя ее к обозначениям, используемым в настоящей статье, для облегчения взаимосвязи излагаемых материалов.

Будем исходить из статистической постановки задачи идентификации, считая, что воздействие (входная переменная) и реакция (выходная переменная) представляют собой случайные функции или случайные величины, которые обозначим соответственно $Y(t)$ и $Z(t)$.

В случае детерминированного безынерционного объекта, когда возмущение и реакцию можно рассматривать как случайные величины Y и Z соответственно, математическая модель, описывающая объект, дается в виде условного математического ожидания Y относительно Z, т. е. вместо выражения (1) объект описывается уравнением вида

$$M\{Z|y\} = f(y),$$

где $M\{Z|y\}$ — условное математическое ожидание Z относительно y; $f(y)$ — неслучайный закон преобразования.

Конкретное выражение оператора A_t для стационарных одномерных линейных объектов, для которых реакция $Z(t)$ не зависит от момента начала действия возмущения $Y(t)$, а зависит только от интервала времени между началом действия $Y(t)$ и данным моментом, может быть задано следующим образом:

дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i z(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j y(t)}{dt^j}, \; n \geq m; \tag{2}$$

импульсной переходной (весовой) функцией

$$z(t)=\int_0^{\infty} g(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

где, согласно условию физической реализуемости системы, $g(t)=0$ при $\tau<0$;

передаточной функцией объекта, которая является дробно-рациональной функцией вида

$$W(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0},\quad n\geq m;$$

частотной характеристикой

$$z(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)\,\bar{Y}(j\omega)\,e^{j\omega}d\omega, \tag{4}$$

где $\bar{Y}(j\omega)$ — преобразование Лапласа сигнала $y(t)$,

$$\bar{Y}(j\omega)=\int_0^{\infty} y(t)\,e^{-j\omega t}dt,\quad j=\sqrt{-1}.$$

Частотная характеристика линейной стационарной системы связана с ее передаточной функцией $W(s)$: последняя может быть получена по частотной характеристике путем замены $j\omega$ на s.

Передаточная функция $W(s)$ связана с весовой функцией $g(\tau)$ преобразованием Лапласа:

$$W(s)=\int_0^{\infty} g(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau;$$

$$g(\tau)=\frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} W(s)\,e^{s\tau}ds.$$

При решении задачи идентификации линейных динамических объектов определяют одну из приведенных характеристик.

Для линейных нестационарных объектов зависимость между реакцией $Z(t)$ и воздействием $Y(t)$ может быть задана с помощью дифференциального уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i z(t)}{dt^i}=\sum_{j=0}^{m} b_j(t)\frac{d^j y(t)}{dt^j},\quad n\geq m; \tag{5}$$

импульсной переходной (весовой) функции $g(t,s)$:

$$z(t) = \int\limits_{t-T}^{t} g(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

или частотной характеристики $W(t, j\omega)$:

$$z(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{a-j\infty}^{a+j\infty} W(t,\ j\omega)\,\overline{Y}(j\omega)\, e^{j\omega} d\omega. \tag{7}$$

Эти представления одномерных линейных объектов эквивалентны, и каждое из них является исчерпывающим описанием динамических свойств объектов.

Пусть для одномерного объекта, характеристикой которого является оператор A_t, могут быть измерены случайные функции входа $Y(t)$ и выхода $Z(t)$. Тогда задача идентификации сводится к определению оператора A_t по результатам измерения входной и выходной случайных функций. Точнее, ставится задача определения не самого оператора A_t, а его оценки A_t^*. Например, оценка коэффициентов в дифференциальных уравнениях (2) или (5), оценка весовой функции в (3) или (6), частотной характеристики в (4) или (7) по результатам измерений $Y(t)$ и $Z(t)$. Оценка оператора A_t^* используется в качестве характеристики неизвестного оператора A_t. Разумно потребовать близость оценки A_t^* к истинному значению A_t в смысле некоторого критерия, т. е. должно быть выполнено требование близости случайной функции выхода модели

$$z^*(t) = A_t^* y(\tau)$$

к случайной функции $Z(t)$, являющейся выходной переменной объекта.

Для решения задачи вводится функция $\rho\left[z_t,\, z_t^*\right]$, которая зависит от $Z(t)$ и $Z^*(t)$ и не зависит от оператора A_t. Выбор этой функции определяется принятым критерием оптимальности. Функцию $\rho\left[z_t,\, z_t^*\right]$ обычно называют функцией потерь. Для решения поставленной задачи на математическое ожидание этой функции накладывают требование минимума:

$$M\left\{\rho\left[z_t,\, z_t^*\right]\right\} = \min, \tag{8}$$

т. е. близость оценки A_t^* к истинному значению оператора A_t. Математическое ожидание от функции потерь обычно называют средним риском, а критерий оптимальности (8) — критерием минимума среднего риска. Соотношение (8) будет выполнено, если потребовать минимум математического ожидания функции $\rho\left[z_t, z_t^*\right]$ при заданной реализации случайной функции $y(\tau)$, т. е.

$$M\left\{\rho\left[z_t, z_t^* \middle| y_\tau;\ \tau \in T\right]\right\} = \min. \tag{9}$$

Условие минимума соотношения (8) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z_t^*} M\left\{\rho\left[z_t, z_t^* \middle| y_\tau;\ \ \tau \in T\right]\right\} = 0.$$

При идентификации объектов управления в большинстве практических случаев ищется оптимальный оператор по критерию минимума среднего квадрата ошибки, т. е. принимают

$$\rho\left[z_t, z_t^*\right] = \left(z_t - z_t^*\right)^2. \tag{10}$$

Тогда из условия (9) можно получить уравнение для определения оптимальной в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценки оператора A_t:

$$z(t) = A_t^* y(\tau) = M\left\{Z(t)\middle| y(\tau);\ \tau \in T\right\}. \tag{11}$$

Из уравнения (11) следует, что оператор условного математического ожидания, т. е. регрессия выходной переменной $Z(t)$ относительно входной $Y(t)$, дает оптимальный в смысле критерия (10) оператор объекта в классе всех возможных операторов.

Если ограничиться линейным описанием объекта, т. е. оптимальный оператор искать в классе линейных операторов, то путем умножения (11) на входную случайную функцию получаем

$$A_t^* y(v)\, y(\tau) = M\left\{Z(t)\middle| y(\tau)\right\} y(v).$$

Применение операции математического ожидания к обеим частям последнего равенства дает

$$\begin{aligned} &M\left\{A_t^* Y(v) Y(\tau)\right\} = M\left\{M\left\{Z(t)\middle| Y(\tau)\right\} Y(v)\right\};\\ &M\left\{A_t^* Y(v) Y(\tau)\right\} = M\left\{Z(t) Y(v)\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку A_t^* определяется в классе линейных операторов, то оператор математического ожидания M коммутативен с оператором

A_t^* при самых общих предположениях. Тогда из (12) получаем следующее уравнение для нахождения оптимальной оценки оператора A_t в классе линейных операторов по критерию минимума среднего квадрата ошибки:

$$A_t^* M\left\{Y(v)Y(\tau)\right\} = M\left\{Z(t)Y(v)\right\}. \tag{13}$$

Если, не ограничивая общности, предположить, что математические ожидания случайных функций входа $Y(t)$ и выхода $Z(t)$ равны нулю, т. е. $M\left\{Y(t)\right\}=0$ и $M\left\{Z(t)\right\}=0,$ то выражение (13) может быть записано в виде

$$A_t^* K_{yy}(v,\tau) = K_{zy}(t,v) \tag{14}$$

а весовая функция $g(t,\tau)$ объекта определена из следующего интегрального уравнения:

$$K_{zy}(t,v) = \int_{t-T}^{t} g(t,\tau) K_{yy}(\tau,v)\, d\tau, \tag{15}$$

где $K_{yy}(\tau,v)$ — автокорреляционная функция случайной функции $Y(t)$; $K_{zy}(t,v)$ — взаимная корреляционная функция случайных функций $Z(t)$ и $Y(t)$; T — интервал времени наблюдения.

Таким образом, оптимальная оценка весовой функции по критерию минимума среднего квадрата ошибки определена соотношением (14) или (15) для модели линейного объекта, описываемого уравнением (5).

В частном случае, когда случайные функции $Z(t)$ и $Y(t)$ являются стационарными и стационарно связанными, оптимальная оценка оператора находится из уравнения

$$K_{zy}(\tau) = A_t^* K_{yy}(t-\tau),$$

а весовая функция (при бесконечном интервале наблюдения) — из интегрального уравнения Винера — Хопфа:

$$K_{zy}(\tau) = \int_{0}^{\infty} g(t) K_{yy}(t-\tau)\, dt, \quad t \ge 0;$$

$$g(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Модель объекта в этом случае задана формулой (3).

Общей характеристикой многомерного объекта может также являться оператор A_t, устанавливающий соответствие между векторными случайными функциями $Z(t)$ и $Y(\tau)$. По результатам измерения $Y(\tau)$ и $Z(t)$ определяется оценка A_t^* оператора A_t. Функция потерь для нахождения оптимального оператора по критерию минимума среднего квадрата ошибки в этом случае принимает вид

$$\rho\left[z(t),\, z^*(t)\right] = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \left[z_i(t) - z_i^*(t)\right]^2, \tag{16}$$

где веса ω_i определяются значимостью каждой из выходных переменных $z_i(t)$, $i = 1, 2, ..., m$.

Если ограничиться классом линейных операторов, то для получения оптимальных оценок A_t по критерию минимума среднего квадрата ошибки на основе (16) можно установить систему уравнений, включающих автокорреляционные и взаимные корреляционные функции рассматриваемых переменных [2]. Для весовых функций система уравнений примет вид

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \int_{t-T}^{t} g_i(t,\tau) K_{y_1 y_i}(\tau, v)\, d\tau = K_{zy_1}(t, v); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} \int_{t-T}^{t} g_i(t,\tau) K_{y_n y_i}(\tau, v)\, d\tau = K_{zy_n}(t, v), \end{gathered} \tag{17}$$

где $K_{y_i y_i}$ — автокорреляционные, а K_{zy_i}, $K_{y_j y_i}$ — взаимные корреляционные функции соответствующих входных и выходных переменных.

Из (17) можно получить систему уравнений для случая, когда $Z(t)$ и $Y_1(\tau),..., Y_n(\tau)$ являются стационарными и стационарно связанными случайными функциями.

Рассмотренная задача идентификации может быть обобщена на объекты с распределенными параметрами. Пусть на входе объекта действует векторная случайная функция $Y(\tau) \subset \left[Y_1(\tau), ..., Y_i(\tau), ..., Y_n(\tau)\right]$, его состояние характеризуется векторным случайным полем $U(\lambda, t) \subset \left[U_1(x,t), ..., U_k(x,t), ..., U_p(x,t)\right]$, а на выходе объекта имеем векторную случайную функцию $Z(t) \subset \left[Z_1(t), ..., Z_j(t), ..., Z_m(t)\right]$.

Задача построения модели объекта с распределенными параметрами сводится к нахождению оценок операторов $A_{x,t}$, зависящих от пространственной координаты x и времени t и устанавливающих соответствие между входной переменной $Y(\tau)$ и случайным полем $U(x,t)$:

$$U(x,t) = A_{x,t} Y(\tau),$$

операторов $B_{x,t}$ между различными составляющими случайного поля:

$$U_l(x,t) = B_{x,t}^l U(x', t'), \quad l = 1, \ldots, p,$$

и операторов $C_{x,t}$ между выходной переменной $Z(t)$ и случайным полем $U(x, t)$:

$$Z(t) = C_{x,t} U(x, t').$$

Аналогично рассмотренному выше введем функцию потерь $\rho\left[u(x,t),\ u^*(x,t)\right]$, на математическое ожидание которой налагается требование минимума, а также функции риска для определения оценок операторов $B_{x,t}$ и $C_{x,t}$. Для нахождения оптимальной в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценки оператора $A_{x,t}$ примем

$$\rho\left[u(x,t),\ u^*(x,t)\right] = \left[u(x,t) - u^*(x,t)\right]^2.$$

При ограничении класса линейных операторов для рассматриваемого случая получим следующую систему уравнений для определения весовых функций:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t-T}^{t} g_{il}^{uy}(x,t,\tau) K_{i1}^{yy}(\tau,v)\, d\tau = K_{l1}^{uy}(x, t, v);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t-T}^{t} g_{il}^{uy}(x,t,\tau) K_{im}^{yy}(\tau,v)\, d\tau = K_{lm}^{uy}(x, t, v),$$

где $K_{ij}^{yy}(\tau,v)$ — взаимная корреляционная функция i-й и j-й составляющих $Y(t)$; $K_{li}^{uy}(x, t, v)$ — взаимная корреляционная функция l-й составляющей $U(x,t)$ и i-й составляющей $Y(t)$; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$; $l = 1, \ldots, p$.

Отметим, что математическое моделирование и соответственно задачи идентификации рассмотренного в этой работе класса объектов и систем базируются на решении линейных дифференциальных уравнений и интегральных уравнениях первого рода, что приемлемо в методах спектральной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кожевников А.Б., Петросян О.П. *Эжекция и сушка материалов в режиме пневмотранспорта.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 132 с.
[2] Кожевников А.Б., Петросян О.П. *Эффективная идентификация технологических объектов водоподготовки.* Калуга, 2008, с. 140–143.
[3] Райбман Н.С., Чадеев В.М. *Построение моделей процесса производства.* Москва, Энергия, 1975, 375 с.

Статья поступила в редакцию 03.04.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Петросян О.П., Горбунов А.К., Кожевников А.Б., Горбунов Е.А., Петросян А.О. Моделирование и идентификация сложных систем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/ catalog/ it/asu/1261.html

Петросян Ованес Петрович родился в 1950 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1978 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: автоматизация технологических процессов.
e-mail: petrosyan-kravt@mail.ru

Горбунов Александр Константинович родился в 1947 г., окончил МФТИ в 1971 г. Д-р физ.-мат наук, профессор кафедры «Физика» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: автоматизация технологических процессов.
e-mail: gorbunov@kadri.ru

Кожевников Александр Борисович родился в 1942 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1970 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: автоматизация технологических процессов. e-mail: kravt@kaluga.ru

Горбунов Евгений Александрович родился в 1974 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1998 г. Канд. экон. наук, зам. начальника экономического отдела ОАО «КАДВИ». Область научных интересов: автоматизация технологических процессов. e-mail: gorbunov@kadri.ru

Петросян Анастасия Ованесовна родилась в 1993 г. Студентка кафедры «Промышленная экология и химия» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: petrosyan-kravt@mail.ru

Modeling and identification of complex systems

O.P. Petrosyan[1], A.K. Gorbunov[1], A.B. Kozhevnikov[1], E.A. Gorbunov[2], A.O. Petrosyan[1]

[1] Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia
[2] KADVI, Public Corporation, Kaluga, 248018, Russia

The main purpose of the article is to examine the mathematical modeling and the identification problems of objects and systems considered in this research. These problems are based on the solution of linear differential equations and integral equations of the first kind, which is acceptable in the methods of spectral optimization.

Keywords: *linear differential equations, spectral optimization, automatic control, automated control, mathematical mapping.*

REFERENCES

[1] Kozhevnikov A.B., Petrosyan O.P. *Ezhektsiya i sushka materialov v rezhime pnevmotransporta* [Ejection and drying of materials in pneumatic transport mode]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 132 p.
[2] Kozhevnikov A.B., Petrosyan O.P. Effekivnaya identifikatsiya tekhnologicheskikh ob"ektov vodopodgotovki [Effective identification of water treatment technological objects]. *Materialy IV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Tekhnologii ochistki vody»* [Proc. of the IV Int. sci.-pract. conf. "Water Treatment Technologies"]. Kaluga, 2008, pp. 140–143.
[3] Raibman N.S., Chadeev V.M. *Postroenie modelei protsessa proizvodstva* [Constructing models of the production process]. Moscow, Energiya Publ., 1975, 375 p.

Petrosyan O.P. (b. 1950) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1978. Ph.D., Assoc. Professor of the Physics Department at Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests include automation of technological processes. e-mail: petrosyan-kravt@mail.ru

Gorbunov A.K. (b. 1947) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1971. Dr. Sci. (Phys.&Math.), Professor of the Physics Department at Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests include automation of technological processes. e-mail: gorbunov@kadri.ru

Kozhevnikov A.B. (b. 1942) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1970. Ph.D., Assoc. Professor of the Physics Department at Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests include automation of technological processes. e-mail: kravt@kaluga.ru

Gorbunov E.A. (b. 1974) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 1998. Ph.D., deputy head of the Economics Department at the Public Corporation "KADVI". Scientific interests include automation of technological processes.
e-mail: gorbunov@kadri.ru

Petrosyan A.O. (b. 1993) is a student at the Industrial Ecology and Chemistry Department of Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests include automation of technological processes. e-mail: petrosyan-kravt@mail.ru