УДК 519.116, 530.145

Формула Харди — Рамануджана и термодинамика квантовой струны

© А.О. Шишанин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Проведено сравнение асимптотической формулы Харди — Рамануджана для разбиений натуральных чисел с числом микросостояний путем вычисления энтропии квантовой струны через формулу Эйлера — Маклорена. Кратко рассмотрен другой подход, использующий подсчет числа состояний через обратное преобразование Лапласа статистической суммы.

Ключевые слова: *разбиение числа, производящая функция, формула Харди — Рамануджана, квантовая струна, статистической сумма, свободная энергия, энтропия, формула Эйлера — Маклорена.*

Введение. Разбиением натурального числа n называется его представление в виде суммы других натуральных чисел, при этом порядок чисел не учитывается. Число таких представлений называется числом разбиений $p(n)$ натурального числа n. Это один из фундаментальных объектов теории чисел и комбинаторики [1].

В 1740 г. Л. Эйлером было обнаружено, что числа разбиений имеют следующую производящую функцию

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Им было также показано, что число разбиений натурального числа n на нечетные числа совпадает с числом разбиений на различные числа. Кроме того, он получил знаменитую рекуррентную формулу для чисел разбиений. Знаменатель производящей функции раскладывается в следующий ряд:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)... = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}+...$$

Тогда рекуррентная формула имеет вид

$$p(m) = p(m-1)+p(m-2)-p(m-5)-p(m-7)+p(m-12)+...$$

Числа, которые стоят здесь в скобках, называются пентагональными или пятиугольными и задаются формулой

$$g_m = \frac{m(3m-1)}{2}.$$

Л. Эйлер сначала предположил, а затем доказал пентагональную теорему, которую можно записать следующей формулой:

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q x^{q(3q+1)/2}.$$

Разбиения чисел удобно описывать с помощью диаграмм Юнга или графов Феррера. Для больших натуральных чисел n Г.Х. Харди и Ш. Рамануджан в 1918 г. [2] получили асимптотическую формулу для числа разбиений. Эта формула независимо была получена также русским математиком Я.В. Успенским в 1920 г и улучшена Х. Радемахером в 1937 г. Формула Харди — Рамануджана при больших N имеет вид

$$p(N)\sim\frac{1}{4N\sqrt{3}}e^{2\pi\sqrt{\frac{N-1/24}{6}}}.$$

Конечно, при больших N можно пренебречь под корнем значением 1/24, но здесь формула дана в первоначальном виде. Эту формулу можно получить, например, если перейти к интегральному представлению для $p(n)$, а затем воспользоваться стандартным асимптотическим методом (например, методом стационарной фазы). Ниже мы попробуем получить асимптотическую оценку числа разбиений, вычисляя энтропию квантовой струны [3].

Разбиения и квантовая струна. Представим состояние обычной струны как суперпозицию состояний с разными гармониками, частоты которых кратны основной частоте ω. Квантовую струну можно рассмотреть как набор гармонических осцилляторов с частотами ω, 2ω, 3ω, … Каждый n-й осциллятор обладает своими операторами рождения a_n^+ и уничтожения a_n, удовлетворяющими обычным коммутационным соотношениям

$$[a_n,\, a_n^+]=\delta_{nk}.$$

Тогда гамильтониан струны будет иметь вид

$$H=\hbar\omega\sum_{k=1}^{\infty}(n+1/2)a_n^+a_n,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

В работе [3] приведено вычисление свободной энергии и энтропии без учета энергии нулевых колебаний. Ниже мы учтем этот вклад сразу. Тогда статистическая сумма (статсумма) запишется так:

$$Z=\sum_n e^{-E_n/(kT)}=\sum_{n_1,n_2,\ldots}\exp\left[-\frac{\hbar\omega}{kT}(n_1+2n_2+3n_3+\ldots)-\frac{\hbar\omega}{2kT}(1+2+3+\ldots)\right].$$

Здесь E_n — энергия n-го уровня; k — постоянная Больцмана; T — температура струны, а сумма факторизуется для каждой гармоники, что позволяет представить статсумму в виде

$$Z = e^{\frac{\hbar\omega}{24kT}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp\left[-\hbar\omega n / \left(kT\right)\right]}.$$

Свободная энергия при этом определяется выражением

$$F = -kT \ln Z = kT \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left\{1 - \exp\left[-\hbar\omega n / \left(kT\right)\right]\right\} - \frac{\hbar\omega}{24}.$$

Эту сумму при больших температурах можно аппроксимировать интегралом, если ввести переменную интегрирования

$$x = \hbar\omega n / (kT).$$

Вычисляя интеграл, получаем выражения для свободной энергии

$$F = -\frac{\pi^2 k^2 T^2}{6\hbar\omega} - \frac{\hbar\omega}{24}$$

и для энтропии

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\pi^2 k^2 T}{3\hbar\omega}.$$

Удобнее выразить температуру через внутреннюю энергию $E = F + TS$. Определим номер уровня N как $E / \left(\hbar\omega\right)$. Воспользуемся формулой Больцмана для статистической энтропии $S = k \ln \Gamma$, где Γ — число микросостояний системы. Будем считать число N большим, а $\Gamma = p(N)$. Можно показать, что это точное равенство. Исключая температуру, получаем

$$\ln p(N) = 2\pi \sqrt{\frac{N + 1/24}{6}}.$$

Эта формула не воспроизводит знаменатель формулы Харди — Рамануджана.

Чтобы сделать более точный расчет свободной энергии, воспользуемся формулой Эйлера — Маклорена для подсчета сумм:

$$\sum_{n=a}^{b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \left(f^{2n-1}(a) - f^{2n-1}(b)\right),$$

где a, b — целые числа и суммирование проводится по всем целым, находящимся между ними; B_{2n} — числа Бернулли.

Тогда учет следующего за интегралом слагаемого приводит к выражению

$$p(N) \approx \frac{\exp\left(2\pi\sqrt{N/6}\right)}{\sqrt[4]{N}}.$$

Видно, что это вычисление не воспроизводит правильную асимптотику числа разбиений, а значит, чисто термодинамическим способом не удается воспроизвести правильный ответ. Получить правильную асимптотику можно, если сразу от статсуммы перейти к подсчету числа состояний. Это возможно благодаря обратному преобразованию Лапласа [4]. Правильный ответ (формула Харди — Рамануджана) для асимптотического числа состояний получается, если воспользоваться методом перевала.

Заключение. Как хорошо известно [3, 5–8], в теории бозонной струны существует некоторая предельная температура — температура Хагедорна, выше которой наступает фазовый переход. Другими словами, при температуре выше температуры Хагедорна статсумма квантовой струны начинает расходиться. Это связано с появлением вихрей [6–8], учет которых требует отдельного рассмотрения. Более того, термодинамическое описание систем, взаимодействующих с гравитацией (теория струн к ним относится), имеет место только при температурах, много меньших планковских. В ином случае понятия температуры, термодинамического ансамбля и фазового перехода теряют смысл.

В данной работе мы обсудили, как можно оценить асимптотику числа разбиений, используя вычисление энтропии для одномерной квантовой струны. Более точный метод предполагает переход от статсуммы сразу к вычислению числа микросостояний. Эти подходы, вероятно, можно обобщить на случай большего числа измерений и других струнных теорий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Эндрюс Г. *Теория разбиений*. Москва, Наука, 1982, 256 с.

[2] Hardy G.H., Ramanujan S. Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis. *Proc. London Math. Soc.,* 1918, vol. 17, pp. 75–115.

[3] Цвибах Б. *Начальный курс теории струн*. Москва, Едиториал УРСС, 2011, 784 с.

[4] Кубо М. *Статистическая механика*. Москва, Мир, 1967, 452 с.

[5] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. *Теория суперструн*. Москва, Мир, 1990, т. 1, 518 с.

[6] Atick J.J., Witten E. The Hagedorn Transition and the Numbers of the Degrees of Freedom of String Theory. *Nucl. Phys.*, 1988, vol. B310, pp. 291–334.

[7] Kogan Ya.I. Vortices on the World Sheet and String's Critical Dynamics. *JETP Lett*., 1987, vol.45, pp. 709–712.

[8] Sathiapalan B. Vortices on the String World Sheet and Constraints on Toral Compactification. *Phys. Rev. D*, 1987, vol. 35, p. 3277.

Статья поступила в редакцию 24.07.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Шишанин А.О. Формула Харди — Рамануджана и термодинамика квантовой структуры. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/1272.html

Шишанин Андрей Олегович родился в 1980 г., окончил МГУ им М.В. Ломоносова в 2003 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 20 публикаций. Область научных интересов: математическая физика. e-mail: shishandr@rambler.ru

Hardy—Ramanujan formula and thermodynamics of quantum string

© A.O. Shishanin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow 105005, Russia

For partitions of natural numbers, there is an asymptotic formula of the Hardy-Ramanujan. In this paper we propose to compare this formula with the number of microstates, using entropy calculation of the quantum string by means of Euler–Maclaurin formula. The work briefly touches upon a different approach, using counting the number of states through the inverse Laplace transformation of the partition function.

Keywords: *partition of the number, the generating function, Hardy–Ramanujan formula, quantum string, partition function, free energy, entropy, Euler–Maclaurin formula.*

REFERENCES

[1] Endryus G. *Teoriya razbieniy* [The theory of partitions]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 256 p.
[2] Hardy G.H., Ramanujan S. Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis. *Proc. London Math. Soc.*, 1918, vol. 17, pp. 75–115.
[3] Tsvibakh B. *Nachal'nyi kurs teorii strun* [Initial course of string theory]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2011, 784 p.
[4] Kubo M. *Statisticheskaya mekhanika* [Statistical mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1967, 452 p.
[5] Grin M., Shvarts Dzh., Vitten E. *Teoriya superstrun* [Superstring theory]. Vol. 1. Moscow, Mir Publ., 1990, 518 p.
[6] Atick J.J., Witten E. The Hagedorn Transition and the Numbers of the Degrees of Freedom of String Theory. *Nucl. Phys.*, 1988, vol. B310, pp. 291–334.
[7] Kogan Ya.I. Vortices on the World Sheet and String's Critical Dynamics. *JETP Lett.*, 1987, vol.45, pp. 709–712.
[8] Sathiapalan B. Vortices on the String World Sheet and Constraints on Toral Compactification. *Phys. Rev. D*, 1987, vol. 35, p. 3277.

Shishanin A.O. (b. 1980) graduated from Lomonosov Moscow State University. Ph.D., Assoc. Professor of the Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. He is the author of about 20 publications. Scientific interests include mathematical physics. e-mail: shishandr@rambler.ru