

Управление колебаниями системы маятник-тележка с приводом методом скоростного биградиента

© Я.А. Долгов, А.А. Зюзин, А.В. Финошин, Ю.И. Мышляев

Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Рассмотрена задача управления колебаниями системы «маятник — тележка» с приводом. Тележка с маятником является механической системой, состоящей из маятника, прикрепленного к тележке, которая катится свободно по плоской поверхности. Для синтеза алгоритма управления используется метод скоростного биградиента. Поскольку система управления является двухкаскадной, а цель управления зависит от фазовых переменных только выходного каскада, целесообразно воспользоваться первым и третьим этапами этого метода. Управление механической подсистемой осуществляется на основе энергетического подхода с частичной линеаризацией. Энергетический подход хорошо зарекомендовал себя в задачах стабилизации неустойчивого положения равновесия маятниковых систем и управления колебаниями. В работе приводится процедура синтеза и результаты моделирования, подтверждающие достижение заданной цели управления.

Ключевые слова: управление энергией, метод скоростного биградиента, частичная линеаризация с обратной связью.

Введение. Свойство «минимального вмешательства» в ход естественных процессов обеспечивается за счет использования подхода, основанного на введении энергетической целевой функции [1, 2, 3]. Так, в задаче стабилизации неустойчивого положения тележки с маятником, управляемой приводом, целью управления является достижение заданного уровня энергии, в задаче слежения — достижение уровня энергии, соответствующего желаемой траектории системы. Важно отметить, что цель управления в этом случае будет достигаться с сохранением характера собственных движений системы и с минимальными затратами. Для обоснования энергетического подхода используется метод скоростного градиента [1, 2] или метод функций Ляпунова в сочетании с теорией пассивации [4].

Энергетический подход хорошо зарекомендовал себя в задачах стабилизации неустойчивого положения равновесия маятниковой системы (двойной маятник [4], маятник с маховиком [4, 5], маятник, тележка с маятником [2, 6]).

Дополнительно рассматривается подсистема формирования силы, приводящей в движение тележку.

Постановка задачи. Тележка с маятником (рис. 1) является механической системой, состоящей из маятника, прикрепленного к те-

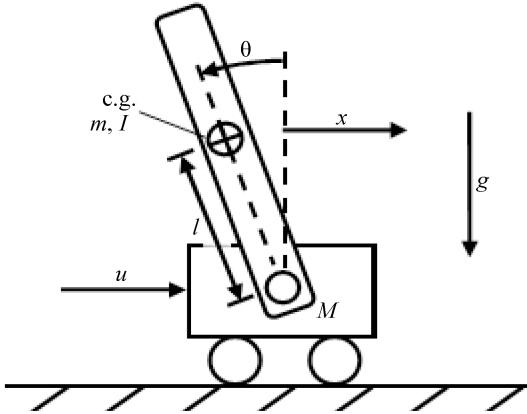


Рис. 1. Тележка с маятником

лежке, которая катится свободно по плоской поверхности. Тележка с маятником имеет две степени свободы.

Уравнение системы в лагранжевой форме:

$$\begin{pmatrix} M + m & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & I + ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f, \quad (1)$$

где M — масса тележки; m — масса маятника; l — длина маятника; I — момент инерции маятника; f — управляющая сила.

Уравнение (1) можно записать в матричной форме:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = Bf, \quad (2)$$

где $\mathbf{q} = [x \ \theta]^T$ — вектор обобщенных координат; H — симметричная положительно определенная матрица масс; C — матрица центробежных сил и сил Кориолиса; Φ — вектор потенциальных сил, B — матрица из единицы и нуля соответствующего размера.

Не умаляя общности, будем считать, что динамика привода описывается интегратором. Уравнение привода, генерирующего силу, приводящую тележку в движение, будет следующим:

$$\dot{f} = u, \quad (3)$$

где u — управление.

Целью управления (ЦУ) является раскачивание маятника с достижением колебаний заданного уровня энергии

$$E = E_d \quad (4)$$

и стабилизация положения тележки:

$$x \rightarrow 0, \dot{x} \rightarrow 0 \quad (5)$$

Синтез алгоритма управления. Поскольку система управления является двухкаскадной, а ЦУ зависит от фазовых переменных выходного каскада, целесообразно воспользоваться первым и третьим этапами метода скоростного биградиента (МСБГ) [7]. В связи с тем, что по постановке задачи параметры считаются заданными, отпадает необходимость использования второго этапа МСБГ.

Этап 1. Синтез алгоритма управления выходным каскадом. На первом этапе синтезируется виртуальное управление маятником на тележке в предположении, что оно совпадает с выходом привода.

Для использования энергетического подхода к синтезу виртуального управления введем линеаризующую обратную связь по следующей схеме.

Перепишем уравнение (2) в скалярной форме с точностью до замены входа механической подсистемы f виртуальным управлением f^{virt} :

$$H_{11}\mathbf{q}_1 + H_{12}\mathbf{q}_2 + C_{11}\mathbf{q}_1 + C_{12}\mathbf{q}_2 + \boldsymbol{\varphi}_1 = f^{virt}, \quad (6)$$

$$H_{21}\mathbf{q}_1 + H_{22}\mathbf{q}_2 + C_{21}\mathbf{q}_1 + C_{22}\mathbf{q}_2 + \boldsymbol{\varphi}_2 = 0. \quad (7)$$

Используя линеаризацию с обратной связью, исключим \mathbf{q}_2 из уравнения (6), в результате получим

$$H_{11}^*\mathbf{q}_1 + C_{11}^*\mathbf{q}_1 + C_{12}^*\mathbf{q}_2 + \boldsymbol{\varphi}_1^* = f^{virt}, \quad (8)$$

где $H_{11}^* = H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{21}$; $C_{11}^* = C_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}C_{21}$; $C_{12}^* = C_{12} - H_{12}H_{22}^{-1}C_{22}$; $\boldsymbol{\varphi}_1^* = \boldsymbol{\varphi}_1 - H_{12}H_{22}^{-1}\boldsymbol{\varphi}_2$.

Линеаризующий вход для (8)

$$f^{virt} = H_{11}^*\mathbf{q}_{1d} + C_{11}^*\mathbf{q}_1 + C_{12}^*\mathbf{q}_2 + \boldsymbol{\varphi}_1^*,$$

который для тележки с маятником имеет вид

$$f^{virt} = \frac{((M+m) - m^2 l^2 g \cos \theta^2)}{(ml^2 + I)} x_d + ml\theta^2 \sin \theta - \frac{(m^2 l^2 g \cos \theta \sin \theta)}{(ml^2 + I)}. \quad (9)$$

Для тележки с маятником данная линеаризация дает следующее:

$$x = x_d(t), \quad (10)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = ml \cos \theta \dot{x}_d(t). \quad (11)$$

Определим отклонение от желаемого уровня энергии как разность между текущей полной механической энергией маятника и желаемой E_d :

$$E = E - E_d, \quad (12)$$

где

$$E = \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (13)$$

Для выходного каскада с заданной ЦУ (12) используем кандидат на функцию Ляпунова в виде

$$V(x) = \frac{1}{2}E^2. \quad (14)$$

Закон управления при $K_1 > 0$ будет иметь вид

$$\dot{x}_d = -K_1 E \theta \cos \theta. \quad (15)$$

Можно показать, что при законе управления (15)

$$\dot{V} = -K_1 E^2 \theta^2 \cos^2 \theta \leq 0. \quad (16)$$

Для стабилизации положения тележки введем ПД-регулятор. С учетом регулятора управление (15) будет иметь вид

$$\dot{x}_d = -K_1 E \theta \cos \theta - k_p x - k_d \dot{x}. \quad (17)$$

Этап 2. Синтез алгоритма управления, обеспечивающего сходимость отклонения выхода привода от виртуального управления к нулю. Введем дополнительную цель управления (ДЦУ)

$$f \rightarrow f^{virt}.$$

Гладкое управление, обеспечивающее достижение ДЦУ [7].

$$u = -\gamma(f - f^{virt}), \quad \gamma > 0. \quad (18)$$

Результаты моделирования. На рис. 2–6 показаны графики результатов моделирования. Проведем моделирование замкнутой системы управления (2), (3), (9), (17), (18) со следующими параметрами.

Условия моделирования:

$$M = 3 \text{ кг}; m = 0,5 \text{ кг}; l = 0,5 \text{ м}; I = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Начальные условия:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \theta(0) = \frac{5}{4} \pi \text{ рад}, \dot{\theta}(0) = 0. \quad (19)$$

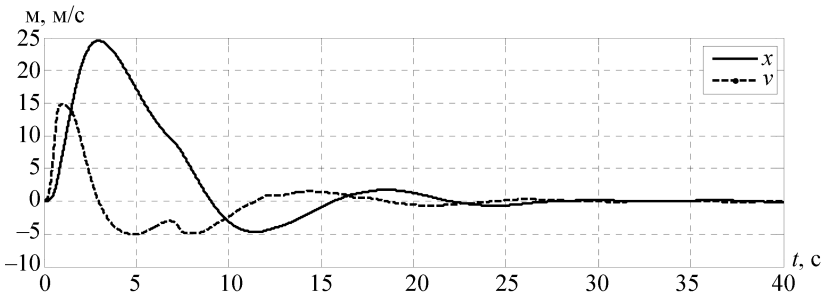


Рис. 2. Перемещение и скорость тележки $v = \dot{x}$

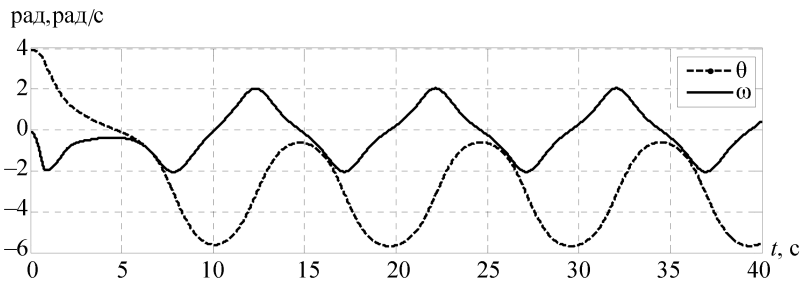


Рис. 3. Угловое перемещение и угловая скорость маятника $\omega = \dot{\theta}$

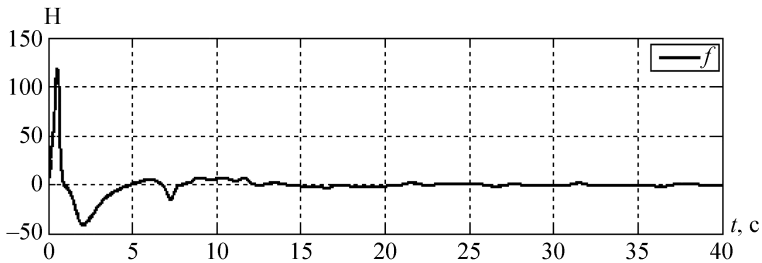


Рис. 4. Управляющая сила

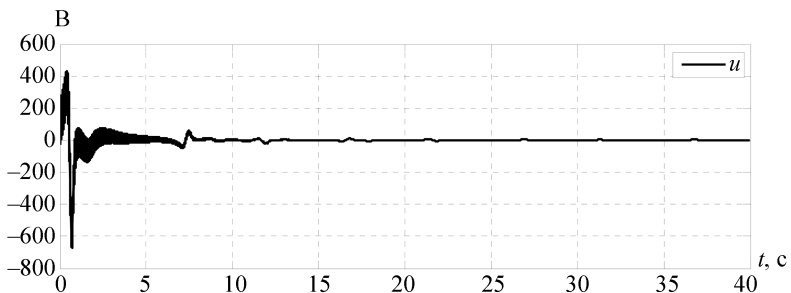


Рис. 5. Управление

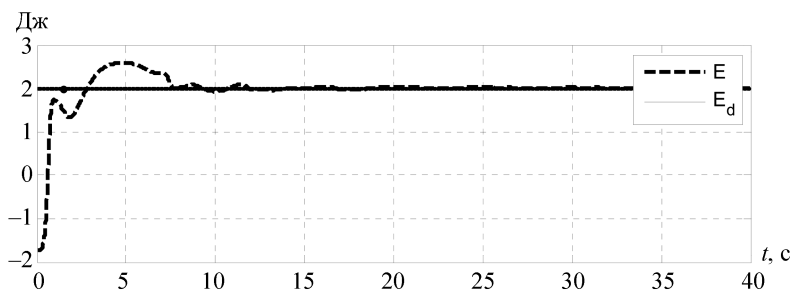


Рис. 6. Энергия маятника и желаемый уровень энергии

Вывод. Рассмотрена задача стабилизации неустойчивого положения тележки с маятником, управляемой приводом. Синтезирован алгоритм управления первым и третьим этапами метода скоростного биградиента. Проведено моделирование, подтверждающее достижение заданного качества.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (грант № 14 – 48 – 03115).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. Санкт-Петербург, Наука, 2000.
- [2] Фрадков А.Л. *Кибернетическая физика: принципы и примеры*. Санкт-Петербург, Наука, 2003.
- [3] Мышляев Ю.И., Фиошин А.В. *Алгоритмы управления гамильтоновыми системами в условиях параметрической неопределенности* [Электронный ресурс]. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/282904.html> (дата обращения 10.10.2014).
- [4] Spong M.W. Energy Based Control Of A Class Of Underactuated Mechanical Systems. *IFAC World Congress*, 1996, pp. 431–435. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.49.9401> (дата обращения 10.10.2014).
- [5] Андриевский Б.Р., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л. Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента. *Автоматика и телемеханика*, 1996, № 4, с. 4–17. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.shtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=3173&option_lang=rus (дата обращения 10.10.2014).
- [6] Peters S.C., Bobrow J.E., Iagnemma K. Stabilizing a vehicle near rollover: An analogy to cart — pole stabilization. *Robotics and Automation (ICRA), IEEE International Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 2010. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=5509367> (дата обращения 10.10.2014).
- [7] Мышляев Ю.И. *Схема бискоростного градиента: Сб. тр. Междунар. техн. конф. «Приборостроение-2002»*, Винница — Алушта, 2002 с. 180–184.

Статья поступила в редакцию 27.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Долгов Я.А., Зюзин А.А., Фиошин А.В., Мышляев Ю.И. Управление колебаниями системы маятник — тележка с приводом методом скоростного биградиента. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 1. URL: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1355.html>

Долгов Ярослав Александрович — студент Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yaroslaw2710@mail.ru

Зюзин Александр Александрович — студент Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: wendid@yandex.ru

Финошин Александр Викторович окончил Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ассистент Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: earlov@gmail.com

Мышляев Юрий Игоревич окончил Балтийский государственный технический университет («Военмех») имени Д.Ф. Устинова в 1983 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: uimysh@mail.ru

Swing-up control of the cart-pole system with drive motor by velocity bi-gradient method

© Ya.A. Dolgov, A.A. Zuzin, A.V. Finoshin, Yu.I. Myshlyaev

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

The article considers the problem of swing-up control of the cart-pole with drive motor. A cart-pole is a mechanical system consisting of a pendulum attached to a cart that rolls freely on a flat surface. The velocity bi-gradient method is chosen to design the control algorithmic synthesis. As the control system consists of two subsystems and the control objective depends only on the output subsystem phase variables there is a good reason to consider the first and the third stages of the velocity bi-gradient method. Control of mechanical subsystem is based on the energy approach with partial feedback linearization and energy shaping. Energy approach has proved to be useful in the task of stabilizing the unstable equilibrium position of the pendulum systems and swing-up control. The design procedure and simulation results confirming the achievement of the specified control objective are presented.

Keywords: *partial feedback linearization, energy shaping, velocity bi-gradient method*

REFERENCES

- [1] Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. *Nelineynoe i adaptivnoe upravlenie slozhnyimi dinamicheskimi sistemami* [Nonlinear and Adaptive Control of Complex Dynamic Systems]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2000, 548 p.
- [2] Fradkov A.L. *Kiberneticheskaya fizika: printsipy i primery* [Cybernetic Physics: Principles and Examples]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2003, 208 p.
- [3] Myshlyaev Yu.I., Finoshin A.V. *Algoritmy upravleniya gamiltonovymi sistemami v usloviyakh parametricheskoy neopredelennosti* [Control Algorithms of Hamiltonian Systems with Parametric Uncertainty]. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/282904.html> (accessed 10.10.2014).
- [4] Spong M.W. Energy Based Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems. *IFAC World Congress*, 1996, pp. 431–435. Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.49.9401> (accessed 10.10.2014).
- [5] Andrievskiy B.R., Guzenko P.Yu., Fradkov A.L. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 1996, no. 4, pp. 4–17. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=3173&option_lang=rus (accessed 10.10.2014).
- [6] Peters S.C., Bobrow J.E., Iagnemma K. Stabilizing a vehicle near rollover: An analogy to cart-pole stabilization. *Robotics and Automation (ICRA), IEEE International Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 2010. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=5509367> (accessed 10.10.2014).
- [7] Myshlyaev Yu.I., *Skhema biskorostnogo gradienta* [Scheme of Bi-Velocity Gradient]. *Proceedings of the International Technical Conference “Instrument Engineering – 2002”*, Vinnitsa – Alushta, 2002, pp. 180–184.

Dolgov Ya.A., a student at Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yaroslav2710@mail.ru.

Zuzin A.A., a student at Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. e-mail: wendid@yandex.ru.

Finoshin A.V. graduated from Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Assistant lecturer at Kaluga Branch of BMSTU. e-mail: earlov@gmail.com.

Myshlyayev Yu.I. graduated from Baltic State Technical University (“Voenmekh”) named after D.F. Ustinov in 1983. Ph.D., assoc. professor of the Automated Control Systems Department at Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. e-mail: uimysh@mail.ru.