

## Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, И.С. Шалыгин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлены базовые соотношения новой теории тонких многослойных анизотропных оболочек, построенной на основании общих уравнений трехмерной теории упругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру без каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Показано, что глобальная (осредненная по определенным правилам) задача асимптотической теории оболочек близка к теории оболочек Кирхгофа — Лява, но отличается от нее определяющими соотношениями, содержащими производные второго порядка от мембранных перемещений. Решены так называемые локальные задачи теории оболочек, с помощью которых получены явные выражения для шести компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига в оболочке.*

**Ключевые слова:** многослойные тонкие оболочки, метод асимптотического осреднения, асимптотическая теория оболочек.

**Введение.** Проблема построения уточненных теорий пластин и оболочек, позволяющих получить как можно более точное решение для напряжений, деформаций и перемещений, приближающееся к точному трехмерному решению задачи теории упругости, но при сохранении двумерности основных разрешающих дифференциальных уравнений, продолжает оставаться весьма актуальной, несмотря на значительное число работ в этой области [1–9]. В работах [2–5] предложены теории тонких пластин и оболочек, в том числе с двумерной микроструктурой (гофрированными, сотовыми и сетчатыми конструкциями), на основе метода асимптотического осреднения (метода гомогенизации), хорошо зарекомендовавшего себя при осреднении композитов с трехмерной периодической структурой [12–18]. В [2–5] вводится допущение о линейном характере перемещений по толщине.

В [19–23] разработан метод асимптотического осреднения тонких многослойных пластин без допущения гипотезы о линейности распределения перемещений, позволяющий получить явное выражение для шести компонент тензора напряжений в тонких пластинах. В [24] проведено сравнение численных решений, получаемых с помощью разработанной асимптотической теории многослойных тонких пластин и с помощью непосредственного численного решения задачи трехмерной теории упругости на основе конечно-элементного мето-

да, реализованного в программном комплексе ANSYS. Результаты показали высокую точность разработанного метода асимптотического осреднения, для достижения которой приходится применять очень мелкие конечно-элементные сетки при использовании конечно-элементного решения трехмерной задачи теории упругости.

Целью настоящей работы является применение метода асимптотического осреднения для тонких упругих оболочек.

**Уравнения трехмерной теории упругости в криволинейных координатах.** В трехмерном пространстве  $R^3$  с декартовыми координатами  $x_i$  рассмотрим поверхность  $\Sigma_0$ , заданную с помощью ортогональных координат  $q_k(x_i)$  в виде  $q_3(x_i) = 0$ , где  $x_i \in \Sigma_{x_0} \subset R^2$  — область изменения значений декартовых координат;  $\Sigma_{x_0}$  — декартов образ поверхности.

Рассмотрим оболочку — тело, которому соответствует область  $V \subset R^3$ , ограниченная внешней  $\Sigma^+$  и внутренней  $\Sigma^-$  поверхностями, уравнения которых имеют вид  $q_3 = -h/2$ ,  $q_3 = h/2$ , а также торцевой поверхностью  $\Sigma_r$ , уравнение которой в криволинейных ортогональных координатах  $q_k$  выглядит так:  $F(q_1, q_2) = 0$ . Соотношения  $q_i = q_i(x^j)$  между криволинейными  $q_i$  и декартовыми  $x^j$  координатами будем полагать гладкими функциями. Параметр  $h$  — толщина оболочки, поверхность  $q_3 = 0$  — срединная поверхность оболочки  $\Sigma_0$ , пересекающая торцевую поверхность по контуру  $\partial\Sigma_0$ . Будем полагать, что координатные линии  $q_1$  и  $q_2$  ориентированы по линиям главных кривизн срединной поверхности оболочки, а линия  $q_3$  — по нормали к этой поверхности. Все криволинейные координаты полагает размерными величинами — длинами дуг по соответствующим координатным направлениям.

В криволинейных координатах  $q_i$  уравнения равновесия тела (оболочки) имеют следующий вид [25]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (H_\beta H_\gamma \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial q_\beta} (H_\alpha H_\gamma \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial q_\gamma} (H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\gamma}) - \\ & - \sigma_{\beta\beta} H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial q_\alpha} - \sigma_{\gamma\gamma} H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\alpha} + \sigma_{\alpha\beta} H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} + \sigma_{\alpha\gamma} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\gamma} - H_\beta H_\gamma f_\alpha = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma.$$

Здесь  $H_\alpha = \left( \sum_{\beta=1}^3 \left( \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} \right)^2 \right)^{1/2}$  — параметры Ламе оболочки;  $\sigma_{\alpha\beta}$  —

компоненты тензора напряжений в ортогональных координатах  $q_i$ ;  $f_\alpha$  — компоненты вектора плотности массовых сил. Запишем первые два уравнения системы (1) отдельно от третьего:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (H_\beta H_3 \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial q_\beta} (H_\alpha H_3 \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha 3}) - \\ & - \sigma_{\beta\beta} H_3 \frac{\partial H_\beta}{\partial q_\alpha} - \sigma_{33} H_\beta \frac{\partial H_3}{\partial q_\alpha} + \sigma_{\alpha\beta} H_3 \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} + \sigma_{\alpha 3} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_3} - H_\beta H_3 f_\alpha = 0, \quad (2) \\ & \alpha, \beta = 1, 2; \quad \alpha \neq \beta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 \sigma_{23}) - \\ & - \sigma_{11} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \sigma_{22} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \sigma_{13} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \sigma_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - H_1 H_2 f_3 = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Соотношения Коши, связывающие деформации  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  композита с перемещениями  $u_\alpha$ , в этой криволинейной системе координат  $q_i$  имеют вид [25]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} u_\beta + \frac{1}{H_\alpha H_3} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_3} u_3; \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{u_2}{H_2} \right); \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial q_3} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} u_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} u_2; \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{H_\alpha}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{u_\alpha}{H_\alpha} \right) + \frac{H_3}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{u_3}{H_3} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$  — компоненты тензора малых деформаций;  $u_\alpha$  — компоненты вектора перемещений в криволинейных координатах  $q_i$ .

Оболочку будем считать многослойной, все слои которой ортогональны к направлению  $q_3$ , являются линейно-упругими и ортотропными, главные оси криволинейной ортотропии совпадают с ко-

ординатными линиями  $q_i$ . Тогда определяющие соотношения оболочки, связывающие деформации  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и напряжения  $\sigma_{\alpha\beta}$ , имеют следующий вид в криволинейной системе координат  $q_i$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL} + C_{Ijk3}\varepsilon_{k3}; \\ \sigma_{i3} &= C_{i3KL}\varepsilon_{KL} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3},\end{aligned}\quad (5)$$

где  $C_{ijkl}$  — модули упругости слоев оболочки.

На внешней и внутренней поверхностях оболочки полагаем, что задано давление  $\tilde{p}_{\pm}$ , на торцевой поверхности  $\Sigma_T$  — перемещение  $u_{ei}$ :

$$\Sigma_T : u_i = u_{ei},$$

а на границе  $\Sigma_S$  раздела слоев оболочки заданы условия идеального контакта слоев оболочки:

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\tilde{p}_{\pm}\delta_{i3}; \quad \Sigma_T : u_i = u_{ei}; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0; \quad [u_i] = 0 \quad (6)$$

( $[u_i]$  — скачок функций), которые могут отсутствовать, например, в случае однослойной оболочки.

**Основные допущения асимптотической теории.** Рассмотрим очень тонкую оболочку, для которой выполняется соотношение

$$\varkappa = h/L \ll 1,$$

где  $\varkappa$  — малый параметр;  $L$  — диаметр срединной поверхности  $\Sigma_0$ .

Введем глобальные безразмерные криволинейные координаты  $\bar{q}_k$  и локальную координату  $\xi$ :

$$\bar{q}_k = q_k/L; \quad \xi = \bar{q}_3/\varkappa.$$

Далее все функции будем рассматривать зависящими от безразмерных координат  $u_i(\bar{q}_{\alpha}, \xi)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и полагать обезразмеренными. Используем при этом следующее правило дифференцирования от безразмерных координат:

$$L \frac{\partial}{\partial q_j} u_i(\bar{q}_{\alpha}, \xi) = \frac{\partial}{\partial \bar{q}_j} u_i(\bar{q}_{\alpha}, \xi) + \frac{1}{\varkappa} \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial \xi} u_i(\bar{q}_{\alpha}, \xi). \quad (7)$$

Примем несколько допущений:

1) рассмотрим случай, когда давление на внешних поверхностях оболочки малó:

$$\tilde{p}_{\pm} = -\varkappa^3 p_{\pm},$$

где  $p_{\pm}$  — конечная величина давления,  $p_{\pm} = O(1)$ ;

2) примем, что тонкая оболочка не содержит резких изломов геометрической формы, т. е. следующие производные от параметров Ламе имеют порядок более высокий, чем  $O(1)$ , по отношению к параметру  $\varkappa$ :

$$\frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \xi} = \varkappa H_{\alpha 3}; \quad H_{\alpha 3} = O(1); \quad \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \bar{q}_{\beta}} = O(1); \quad H_3 = 1. \quad (8)$$

Как правило, для тонких оболочек принимают следующие стандартные допущения [18, 25]:

$$H_3 = 1; \quad H_{\alpha} = A_{\alpha} (1 + k_{\alpha} q_3) \approx A_{\alpha}, \quad \bar{k}_{\alpha} \bar{q}_3 = \varkappa \bar{k}_{\alpha} \xi \ll 1,$$

где  $A_{\alpha}(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$  — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности ( $q_3 = 0$ );  $\bar{k}_{\alpha} = k_{\alpha} L$  — ее безразмерные главные кривизны, и значит,

$$\frac{\partial H_3}{\partial \bar{q}_3} = 0; \quad \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \xi} = \varkappa A_{\alpha} \bar{k}_{\alpha}; \quad H_{\alpha 3} = A_{\alpha} \bar{k}_{\alpha}; \quad \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \bar{q}_{\beta}} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial \bar{q}_{\beta}}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда из формулы (8) следует, что  $A_{\alpha} L / R_{\alpha} = O(1)$ , где  $R_{\alpha} = 1/k_{\alpha}$  — радиусы главных кривизн. Сделанное допущение 2 означает, что оболочки не должны иметь малых радиусов кривизн, при которых возникает соотношение  $A_{\alpha} L / R_{\alpha} = 1/\varkappa$ , т. е. радиусы кривизн должны быть много больше толщины оболочки:  $h/R_{\alpha} \ll 1$ . Тогда формулы (4) с учетом (8) можно записать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_{\alpha}} u_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} H_{\alpha,\beta} u_{\beta} + \frac{1}{\varkappa} \frac{H_{\alpha/3}}{H_{\alpha}} u_3; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2H_1 H_2} (u_{1,2} H_1 - u_1 H_{1,2} + u_{2,1} H_2 - u_2 H_{2,1}); \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{\varkappa} u_{3/3}; \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{\varkappa} u_{\alpha/3} + \frac{u_{3,\alpha}}{H_{\alpha}} - \frac{1}{\varkappa} \frac{H_{\alpha/3}}{H_{\alpha}} u_{\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

**Асимптотические разложения для многослойной оболочки.** Компоненты тензора модулей упругости  $C_{\alpha\beta}(\xi)$  полагают зависящи-

ми от координаты  $\xi$ , так как этот тензор различен для разных слоев оболочки. Задача (2)–(6) содержит локальную координату  $\xi$ , а также малый параметр  $\varepsilon$  в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение будем искать в виде асимптотических разложений по параметру  $\varepsilon$ :

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_{ij}^{(n)} = u_k^{(0)}(x_I) + \varepsilon u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \varepsilon^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \quad (10)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные прописными буквами  $I, J, K, L, M$ , а также индексы  $\alpha, \beta$  принимают значения 1, 2, причем  $\alpha \neq \beta$ , а индексы  $i, j, k, l$  — значения 1, 2, 3.

Подставим разложения (10) в соотношения Коши (9), используя правила дифференцирования функций локальных координат (7), и получим асимптотические разложения для деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots; \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} &= \frac{1}{H_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + \frac{1}{H_1 H_2} H_{\alpha,\beta} u_\beta^{(n)} + \frac{1}{H_\alpha} u_3^{(n)} H_{\alpha 3}; \\ \varepsilon_{12}^{(n)} &= \frac{1}{2H_1 H_2} (u_{1,2}^{(n)} H_1 - u_1^{(n)} H_{1,2} + u_{2,1}^{(n)} H_2 - u_2^{(n)} H_{2,1}); \\ \varepsilon_{33}^{(n)} &= u_{3/3}^{(n+1)}; \\ 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} &= u_{\alpha/3}^{(n+1)} + \frac{u_{3,\alpha}^{(n)}}{H_\alpha} - \frac{H_{\alpha 3}}{H_\alpha} u_\alpha^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя (11) в систему (5), получаем асимптотические разложения для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots; \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(n)} &= C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJK3} \varepsilon_{k3}^{(n)}; \\ \sigma_{i3}^{(n)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

**Формулировка локальных задач.** Подставляя разложения (10) и (13) в уравнения равновесия и граничные условия системы (2), (3), получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varkappa} \left( H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(0)} \right) + \\
 & + \left( \left( H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} \right)_{,\alpha} + \left( H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \right)_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} + \right. \\
 & + \left. \left( H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(0)} + H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(1)} - H_\beta f_\alpha \right) + \\
 & + \varkappa \left( \left( H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} \right)_{,\alpha} + \left( H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \right)_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(1)} + \right. \\
 & + \left. \left( H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(1)} + H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(2)} \right) + \\
 & + \varkappa^2 \left( \left( H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)} \right)_{,\alpha} + \left( H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \right)_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(2)} + \right. \\
 & + \left. \left( H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(2)} + H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(3)} \right) + \dots = 0, \tag{15}
 \end{aligned}$$

$\alpha, \beta = 1, 2;$

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} + \varkappa \sigma_{i3}^{(1)} + \varkappa^2 \sigma_{i3}^{(2)} + \dots = -\varkappa^3 p_\pm \delta_{i3};$$

$$\Sigma_T : u_i = u_i^{(0)} + \varkappa u_i^{(1)} + \varkappa^2 u_i^{(2)} + \varkappa^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei};$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varkappa} \left( H_1 H_2 \sigma_{33/3}^{(0)} \right) + \\
 & + \left( \sigma_{13}^{(0)} H_2 \right)_{,1} + \left( \sigma_{23}^{(0)} H_1 \right)_{,2} - \sigma_{11}^{(0)} H_2 H_{13} - \sigma_{22}^{(0)} H_1 H_{23} + \\
 & + \sigma_{33}^{(0)} \left( H_{13} H_2 + H_{12} H_{13} \right) + H_1 H_2 \sigma_{33/3}^{(1)} - H_1 H_2 f \Big) + \\
 & + \varkappa \left( \left( \sigma_{13}^{(1)} H_2 \right)_{,1} + \left( \sigma_{23}^{(1)} H_1 \right)_{,2} - \sigma_{11}^{(1)} H_2 H_{13} - \sigma_{22}^{(1)} H_1 H_{23} + \right. \\
 & + \left. \sigma_{33}^{(1)} \left( H_{13} H_2 + H_{12} H_{13} \right) + H_1 H_2 \sigma_{33/3}^{(2)} \right) + \dots = 0. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Приравняв в уравнениях равновесия члены при  $\varkappa^{-1}$  к нулю, а при остальных степенях от  $\varkappa$  к некоторым величинам  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ , не зависящим от  $\xi_l$ , получим рекуррентную последовательность локальных задач:

$$\sigma_{i3/3}^{(0)} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 & \left( H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)} \right)_{,\alpha} + \left( H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} \right)_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + \\
 & + \left( H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} + H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(n)} = h_\alpha^{(n-1)}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

$\alpha, \beta = 1, 2;$

$$\begin{aligned}
 & \left( H_2 \sigma_{13}^{(n-1)} \right)_{,1} + \left( H_1 \sigma_{23}^{(n-1)} \right)_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} + \\
 & + \left( H_{13} H_2 + H_{12} H_{13} \right) \sigma_{33}^{(n-1)} + H_1 H_2 \sigma_{33/3}^{(n)} = h_3^{(n-1)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{i3}^{(n)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(n)}; \\
 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} &= O_{\alpha} u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + H_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_{\beta}^{(n)} + H_{\alpha 3} O_{\alpha} u_3^{(n)}; \\
 2\varepsilon_{12}^{(n)} &= O_2 u_{1,2}^{(n)} + O_1 u_{2,1}^{(n)} - O_1 O_2 (H_{1,2} u_1^{(n)} + H_{2,1} u_2^{(n)}); \\
 \varepsilon_{33}^{(n)} &= u_{3/3}^{(n+1)}; \\
 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} &= u_{\alpha/3}^{(n+1)} - H_{\alpha 3} O_{\alpha} u_{\alpha}^{(n)} + O_{\alpha} u_{3,\alpha}^{(n)}; \\
 \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(3)} = -p_{\pm} \delta_{i3}; \\
 \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(n)}] &= 0, \quad [u_i^{(n+1)}] = 0; \quad \langle u_i^{(n+1)} \rangle = 0,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где обозначено  $O_{\alpha} = 1/H_{\alpha}$  и введена операция осреднения по толщине оболочки  $\langle u_i^{(n)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(n)} d\xi$ .

Уравнения равновесия (15), (16) после введения функций  $h_i^{(0)}$ ,  $h_i^{(1)}$ ,  $h_i^{(2)}$  принимают вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n h_i^{(n)} = h_i^{(0)} + \varkappa h_i^{(1)} + \varkappa^2 h_i^{(2)} + \dots = 0.$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (17) при  $n = 0$  являются функции  $u_j^{(1)}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(0)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(0)}$  (напряжения  $\sigma_{ij}^{(n)} = 0$ ,  $n < 0$ ), которые зависят от локальных координат  $\xi_j$  и входных данных этой задачи — перемещений  $u_j^{(0)}(x_j)$ . Решением задачи (17) при  $n = 1$  для первого приближения являются функции  $u_j^{(2)}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(1)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(1)}$ , а  $u_j^{(1)}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(0)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(0)}$  в этой задаче — входные данные. В задаче (17) для второго приближения при  $n = 2$  функции  $u_j^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(2)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(2)}$  — неизвестные, а  $u_j^{(2)}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(1)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(1)}$  — входные данные и т. д.

**Решение задачи нулевого приближения.** Ввиду того что задачи (17) являются одномерными по локальной переменной  $\xi$ , их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче нулевого приближения имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \forall \xi : -0,5 < \xi < 0,5. \tag{18}$$

Подставляя в (18) определяющее соотношение (четвертая группа уравнений из (17)) для  $\sigma_{i3}^{(0)}$ , получаем

$$C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(0)} = 0.$$



Выразим из этой системы уравнений деформации  $\varepsilon_{k3}^{(0)}$ :

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad (19)$$

где  $C_{k3i3}^{-1}$  — матрица компонент, обратная к  $C_{i3k3}$ . Подставляя в (19) выражения для деформаций  $\varepsilon_{k3}^{(0)}$  из (12), получаем

$$\begin{aligned} u_{\alpha/3}^{(1)} &= -2C_{\alpha3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + H_{\alpha3} O_{\alpha} u_{\alpha}^{(0)} - O_{\alpha} u_{3,\alpha}^{(0)}, \quad \alpha = 1, 2; \\ u_{3/3}^{(1)} &= -C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \end{aligned} \quad (20)$$

После интегрирования уравнений (20) с учетом условий  $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$  находим перемещения  $u_i^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^{(1)} &= -\langle O_{\alpha} \rangle_{\xi} u_{3,\alpha}^{(0)} + \langle H_{\alpha3} O_{\alpha} \rangle_{\xi} u_{\alpha}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{\alpha3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}; \\ u_3^{(1)} &= -\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь учтено, что деформации  $\varepsilon_{KL}^{(0)}(x_J)$ , согласно (12), не зависят от координаты  $\xi$ . Также здесь введено обозначение для следующей операции:

$$\langle C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi} = \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi - \langle \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \rangle. \quad (22)$$

Подставляя выражение (19) в первую группу соотношений (14), находим, что напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$  в отличие от напряжений  $\sigma_{i3}^{(0)}$  являются ненулевыми:

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)}; \quad (23)$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}.$$

**Решение задач первого, второго и третьего приближений.** Решение уравнений равновесия в системе (15), (16) вместе с граничными условиями на поверхности  $\Sigma_s$  и значением координаты  $\xi = -0,5$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha3}^{(1)} &= O_1 O_2 \left( - \int_{-0,5}^{\xi} ((H_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - \right. \\ &\left. - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} + (H_{\alpha} H_{\beta3} + 2H_{\beta} H_{\alpha3}) \sigma_{\alpha3}^{(0)}) d\xi + h_{\alpha}^{(0)} (\xi + 0,5) \right); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(2)} = & O_1 O_2 \left( - \int_{-0,5}^{\xi} ((H_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(1)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)} - \right. \\ & \left. - H_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(1)} + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(1)}) d\xi + h_{\alpha}^{(1)}(\xi + 0, 5) \right); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(3)} = & O_1 O_2 \left( - \int_{-0,5}^{\xi} ((H_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(2)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(2)} - \right. \\ & \left. - H_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(2)} + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(2)}) d\xi; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(3)} = & O_1 O_2 \left( - \int_{-0,5}^{\xi} ((H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(2)} + \right. \\ & \left. + (H_{13} H_2 + H_{12} H_{13}) \sigma_{33}^{(2)}) d\xi + h_3^{(2)}(\xi + 0, 5) \right) - p_-. \end{aligned}$$

Условия существования решения (24)–(26) задач (15), (16), удовлетворяющих граничным условиям  $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(3)} = -p_+$  на внешней поверхности  $\xi = 0, 5$ , приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций  $h_i^{(0)}$ ,  $h_i^{(1)}$ ,  $h_i^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{(0)} = & \langle ((H_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(0)} - H_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(0)}) + \\ & + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(0)} \rangle; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{(1)} = & \langle ((H_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(1)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)} - H_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(1)} + \\ & + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(1)}) \rangle; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{(2)} = & \langle ((H_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(2)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(2)} - H_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(2)} + \\ & + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(2)}) \rangle; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} h_3^{(2)} = & \langle (H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(2)} + \\ & + (H_{13} H_2 + H_{12} H_{13}) \sigma_{33}^{(2)} \rangle > -\Delta p, \Delta p = p_+ - p_-. \end{aligned}$$

С учетом формул (27)–(29) выражения для напряжений  $\sigma_{i3}^{(m)}$  (24)–(26) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(1)} = & -O_1 O_2 \langle ((H_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(0)} - H_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(0)}) + \\ & + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(0)} \rangle_{\xi}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(2)} = & -O_1 O_2 \langle ((H_{\beta} \sigma_{\alpha \alpha}^{(1)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(1)} - \\ & - H_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(1)} + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(1)}) \rangle_{\xi}; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(3)} = -O_1 O_2 < ((H_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(2)} + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(2)}) >_{\xi};$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = -O_1 O_2 < (H_2 \sigma_{13}^{(1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(1)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(1)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(1)} + H_{13} (H_2 + H_{12}) \sigma_{33}^{(1)} >_{\xi};$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = -O_1 O_2 < (H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(2)} + H_{13} (H_2 + H_{12}) \sigma_{33}^{(2)} >_{\xi} - (p_- + O_1 O_2 \Delta p(\xi + 0, 5)).$$

В формулах (30), (31)  $\alpha = 1, 2, 3$ . Если подставить выражения (23) в (30), для сдвиговых напряжений  $\sigma_{\alpha 3}^{(1)}$  получим следующую формулу:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -O_1 O_2 \int_{-0,5}^{\xi} (< (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} (H_{\beta} \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\alpha} + C_{\alpha\beta KL}^{(0)} (H_{\alpha} \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\beta} + (H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} - H_{\beta,\alpha} C_{\beta\beta KL}^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(0)}) > - (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} (H_{\beta} \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\alpha} + C_{\alpha\beta KL}^{(0)} (H_{\alpha} \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\beta} + (H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} - H_{\beta,\alpha} C_{\beta\beta KL}^{(0)}) \varepsilon_{KL}^{(0)}) d\xi, \alpha = 1, 2,$$

или, раскрывая скобки в подынтегральном выражении:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -O_1 O_2 \left( \int_{-0,5}^{\xi} (< (H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} + H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} + (2H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) \varepsilon_{KL}^{(0)}) > - (H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} + H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} + (2H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) \varepsilon_{KL}^{(0)}) d\xi, \alpha = 1, 2. \right. \quad (32)$$

Используя обозначение (22), формулу (32) можно переписать так:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -O_1 O_2 (\varepsilon_{KL}^{(0)} < (2H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) >_{\xi} + \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} < H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} >_{\xi} + \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} < H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} >_{\xi}), \alpha = 1, 2. \quad (33)$$

Из формулы (30) при  $\alpha = 3$  следует, что нормальное напряжение  $\sigma_{33}^{(1)}$  тождественно равно нулю:

$$\sigma_{33}^{(1)} \equiv 0 \quad (34)$$

в силу того, что  $\sigma_{i3}^{(0)} = 0$ .

Выразив деформации  $\varepsilon_{k3}^{(1)}$  из соотношений (14), с учетом формул (33) и (34) получим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{k3}^{(1)} &= -C_{i3k3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3}^{-1} \sigma_{i3}^{(1)} = \\
 &= -C_{i3k3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} - \sum_{\alpha=1}^2 C_{\alpha 3k3}^{-1} O_1 O_2 (\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle 2H_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + \\
 &\quad + H_{\beta, \alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}) \rangle_{\xi} + \\
 &\quad + \varepsilon_{KL, \alpha}^{(0)} \langle H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \rangle_{\xi} + \varepsilon_{KL, \beta}^{(0)} \langle H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \rangle_{\xi}). \quad (35)
 \end{aligned}$$

Если подставить формулу (35) в первую группу соотношений (14), то найдем оставшиеся напряжения первого приближения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{IJ}^{(1)} &= C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} - C_{IJK3} C_{i3k3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} - \sum_{\alpha=1}^2 C_{IJK3} C_{\alpha 3k3}^{-1} O_1 O_2 (\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle \\
 &\quad \langle 2H_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta, \alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}) \rangle_{\xi} + \\
 &\quad + \varepsilon_{KL, \alpha}^{(0)} \langle H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \rangle_{\xi} + \varepsilon_{KL, \beta}^{(0)} \langle H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \rangle_{\xi}). \quad (36)
 \end{aligned}$$

Деформации  $\varepsilon_{KL}^{(1)}$  с учетом формул (12) и (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} &= O_{\alpha} (-\langle O_{\alpha, \alpha} \rangle_{\xi} u_{3, \alpha}^{(0)} - \langle O_{\alpha} \rangle_{\xi} u_{3, \alpha\alpha}^{(0)} + \\
 &\quad + \langle H_{\alpha 3} \rangle_{\xi} O_{\alpha} u_{\alpha}^{(0)} + \langle H_{\alpha 3} \rangle_{\xi} O_{\alpha} u_{\alpha, \alpha}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL, \alpha}^{(0)} \langle C_{\alpha 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 &\quad + H_{\alpha, \beta} O_1 O_2 (-\langle O_{\beta} \rangle_{\xi} u_{3, \beta}^{(0)} + \langle H_{\beta 3} O_{\beta} \rangle_{\xi} u_{\beta}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{\beta 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 &\quad + H_{\alpha 3} O_{\alpha} (-\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}); \\
 2\varepsilon_{12}^{(1)} &= O_1 O_2 (H_1 (-\langle O_{1, 2} \rangle_{\xi} u_{3, 1}^{(0)} + \langle O_1 \rangle_{\xi} u_{3, 12}^{(0)}) + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi}, 2 u_1^{(0)} + \\
 &\quad + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi} u_{1, 2}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL, 2}^{(0)} \langle C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 &\quad + H_2 (-\langle O_{2, 1} \rangle_{\xi} u_{3, 2}^{(0)} - \langle O_2 \rangle_{\xi} u_{3, 21}^{(0)} + \langle H_{23} O_2 \rangle_{\xi}, 1 u_2^{(0)} + \\
 &\quad + \langle H_{23} O_2 \rangle_{\xi} u_{2, 1}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL, 1}^{(0)} \langle C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) - \\
 &\quad - H_{1, 2} (-\langle O_1 \rangle_{\xi} u_{3, 1}^{(0)} + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi} u_1^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) - \\
 &\quad - H_{2, 1} (-\langle O_2 \rangle_{\xi} u_{3, 2}^{(0)} + \langle H_{23} O_2 \rangle_{\xi} u_2^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}).
 \end{aligned}$$

Тогда напряжения (36) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{IJ}^{(1)} &= C_{IJ\alpha\alpha}^{(0)} (O_{\alpha} (-\langle O_{\alpha, \alpha} \rangle_{\xi} u_{3, \alpha}^{(0)} - \langle O_{\alpha} \rangle_{\xi} u_{3, \alpha\alpha}^{(0)} + \langle H_{\alpha 3} \rangle_{\xi} O_{\alpha} u_{\alpha}^{(0)} + \\
 &\quad + \langle H_{\alpha 3} \rangle_{\xi} O_{\alpha} u_{\alpha, \alpha}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL, \alpha}^{(0)} \langle C_{\alpha 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + H_{\alpha, \beta} O_1 O_2 (-\langle O_{\beta} \rangle_{\xi} u_{3, \beta}^{(0)} + \\
 &\quad + \langle H_{\beta 3} O_{\beta} \rangle_{\xi} u_{\beta}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{\beta 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ H_{\alpha 3} O_{\alpha} (-\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} >_{\xi}) + \frac{1}{2} C_{IJ12}^{(0)} O_1 O_2 (H_1 (-< O_{1,2} >_{\xi} u_{3,1}^{(0)} + \\
 &\quad + < O_1 >_{\xi} u_{3,12}^{(0)}) + (< H_{13} O_1 >_{\xi})_{,2} u_1^{(0)} + < H_{13} O_1 >_{\xi} u_{1,2}^{(0)} - \\
 &\quad - 2\varepsilon_{KL,2}^{(0)} < C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} >_{\xi}) + H_2 (-< O_{2,1} >_{\xi} u_{3,2}^{(0)} - < O_2 >_{\xi} u_{3,21}^{(0)} + \\
 &+ (< H_{23} O_2^{(0)} >_{\xi})_{,1} u_2^{(0)} + < H_{23} O_2^{(0)} >_{\xi} u_{2,1}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL,1}^{(0)} < C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} >_{\xi}) - \\
 &\quad - H_{1,2} (-< O_1 >_{\xi} u_{3,1}^{(0)} + < H_{13} O_1 >_{\xi} u_1^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} >_{\xi}) - \\
 &\quad - H_{2,1} (-< O_2 >_{\xi} u_{3,2}^{(0)} + < H_{23} O_2 >_{\xi} u_2^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} >_{\xi}) + \\
 &\quad - C_{IJK3} C_{i3k3}^{-1} O_1 O_2 (\varepsilon_{KL}^{(0)} < (2H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) >_{\xi} + \\
 &\quad + \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} < H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} >_{\xi} + \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} < H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} >_{\xi}). \quad (37)
 \end{aligned}$$

### Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек.

Осредним асимптотические разложения (16) уравнений равновесия и учтем граничные условия  $\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(3)} = -p_{\pm} \delta_{i3}$ , тогда получим

$$\begin{aligned}
 &< ((H_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} + \\
 &\quad + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(0)}) > + \varkappa < ((H_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} + \\
 &\quad + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(1)} + \\
 &\quad + (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(1)}) > + \varkappa^2 < ((H_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)})_{,\alpha} + \\
 &\quad + (H_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(2)} + \\
 &\quad (H_{\alpha} H_{\beta 3} + 2H_{\beta} H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(2)}) > - H_1 H_2 \Delta p \delta_{\alpha 3} + \dots = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< (H_2 \sigma_{13}^{(0)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(0)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(0)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(0)} + \\
 &+ (H_{13} H_2 + H_{12} H_{13}) \sigma_{33}^{(0)} > + \varkappa < (H_2 \sigma_{13}^{(1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(1)})_{,2} - \\
 &\quad - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(1)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(1)} + (H_{13} H_2 + H_{12} H_{13}) \sigma_{33}^{(1)} > + \\
 &+ \varkappa^2 < (H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(2)} + \\
 &\quad + (H_{13} H_2 + H_{12} H_{13}) \sigma_{33}^{(2)} > - H_1 H_2 \Delta p + \dots = 0.
 \end{aligned}$$

Домножив уравнения равновесия системы (15) на  $\xi \varkappa$  и проинтегрировав их по толщине, получим следующее вспомогательное уравнение:

$$\begin{aligned} & \varkappa \langle \xi((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} + \\ & \quad + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(0)}) \rangle - \langle H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3}^{(1)} \rangle + \\ & + \varkappa^2 \langle \xi((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(1)} + \\ & \quad + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(1)}) \rangle - \langle H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3}^{(2)} \rangle + \dots = 0, \end{aligned}$$

где учтено, что  $\langle \xi H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(n)} \rangle = - \langle H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3}^{(n)} \rangle$ .

Введем обозначения для усилий  $T_{IJ}$ , моментов  $M_{IJ}$  и перерезывающих сил  $Q_I$  в оболочке:

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \langle \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \varkappa \langle \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \dots; \\ M_{IJ} &= \varkappa \langle \xi \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \varkappa^2 \langle \xi \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \dots; \\ Q_I &= \varkappa \langle \sigma_{I3}^{(1)} \rangle + \varkappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

В силу (18)  $\langle \sigma_{I3}^{(0)} \rangle = 0$ , поэтому эти слагаемые в (38) далее можно не учитывать. Тогда, группируя соответствующие члены с разными степенями от  $\varkappa$ , стоящие при  $H_\beta$ ,  $H_{\alpha,\beta}$  и др., и учитывая, что эти параметры Ламе не зависят от координаты  $\xi$ , получаем

$$\begin{aligned} & (H_\beta T_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (H_\alpha T_{\alpha\beta})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta} - H_{\beta,\alpha} T_{\beta\beta} = 0; \\ & (H_\beta M_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (H_\alpha M_{\alpha\beta})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} - H_{\beta,\alpha} M_{\beta\beta} - H_1 H_2 Q_\alpha = 0; \\ & (H_2 Q_1)_{,1} + (H_1 Q_2)_{,2} - H_2 H_{13} T_{11} - H_1 H_{23} T_{22} - H_1 H_2 \Delta \bar{p} = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Это и есть искомые осредненные уравнения равновесия многослойной оболочки, где обозначено  $\Delta \bar{p} = \varkappa^2 \Delta p$ . Формально эти уравнения в точности совпадают с классическими осредненными уравнениями теории оболочек Кирхгофа — Лява [25].

**Осредненные определяющие соотношения теории оболочек.** Подставляя выражения (23), (33) для напряжений  $\sigma_{IJ}^{(0)}$ ,  $\sigma_{IJ}^{(1)}$  в формулы (38), получаем

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle \varepsilon_{KL}^{(0)} + \varkappa \langle (C_{IJ\alpha\alpha}^{(0)} (O_\alpha (- \langle O_{\alpha,\alpha} \rangle_\xi u_{3,\alpha}^{(0)} - \langle O_\alpha \rangle_\xi u_{3,\alpha\alpha}^{(0)} + \\ & \quad + \langle H_{\alpha 3} \rangle_\xi O_\alpha)_{,\alpha} u_\alpha^{(0)} + \langle H_{\alpha 3} \rangle_\xi O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} \langle C_{\alpha 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_\xi) + \\ & \quad + H_{\alpha,\beta} O_1 O_2 (- \langle O_\beta \rangle_\xi u_{3,\beta}^{(0)} + \langle H_{\beta 3} O_\beta \rangle_\xi u_\beta^{(0)} - \\ & \quad - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{\beta 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_\xi) + H_{\alpha 3} O_\alpha (-\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_\xi) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} C_{IJ12}^{(0)} O_1 O_2 (H_1 (-\langle O_{1,2} \rangle_{\xi} u_{3,1}^{(0)} + \langle O_1 \rangle_{\xi} u_{3,12}^{(0)}) + \\
 & + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi},_2 u_1^{(0)} + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi} u_{1,2}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL,2}^{(0)} \langle C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 & + H_2 (-\langle O_{2,1} \rangle_{\xi} u_{3,2}^{(0)} - \langle O_2 \rangle_{\xi} u_{3,21}^{(0)} + \langle H_{23} O_2^{(0)} \rangle_{\xi},_1 u_2^{(0)} + \\
 & + \langle H_{23} O_2^{(0)} \rangle_{\xi} u_{2,1}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL,1}^{(0)} \langle C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) - \\
 & - H_{1,2} (-\langle O_1 \rangle_{\xi} u_{3,1}^{(0)} + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi} u_1^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) - \\
 & - H_{2,1} (-\langle O_2 \rangle_{\xi} u_{3,2}^{(0)} + \langle H_{23} O_2 \rangle_{\xi} u_2^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 & - \sum_{\alpha=1}^2 C_{IJK3} C_{\alpha 3k3}^{-1} O_1 O_2 (\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle (2H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) \rangle_{\xi} + \\
 & + \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} \langle H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \rangle_{\xi} + \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} \langle H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \rangle_{\xi}) >_{\xi}; \tag{40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{IJ} = & \varkappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \varkappa^2 \langle (C_{IJ\alpha\alpha}^{(0)} (O_{\alpha} (-\langle O_{\alpha,\alpha} \rangle_{\xi} u_{3,\alpha}^{(0)} - \\
 & - \langle O_{\alpha} \rangle_{\xi} u_{3,\alpha\alpha}^{(0)} + \langle H_{\alpha 3} \rangle_{\xi} O_{\alpha},_{\alpha} u_{\alpha}^{(0)} + \langle H_{\alpha 3} \rangle_{\xi} O_{\alpha} u_{\alpha,\alpha}^{(0)} - \\
 & - 2\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} \langle C_{\alpha 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + H_{\alpha,\beta} O_1 O_2 (-\langle O_{\beta} \rangle_{\xi} u_{3,\beta}^{(0)} + \\
 & + \langle H_{\beta 3} O_{\beta} \rangle_{\xi} u_{\beta}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{\beta 3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 & + H_{\alpha 3} O_{\alpha} (-\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \frac{1}{2} C_{IJ12}^{(0)} O_1 O_2 (H_1 (- \\
 & - \langle O_{1,2} \rangle_{\xi} u_{3,1}^{(0)} + \langle O_1 \rangle_{\xi} u_{3,12}^{(0)}) + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi},_2 u_1^{(0)} + \\
 & + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi} u_{1,2}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL,2}^{(0)} \langle C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 & + H_2 (-\langle O_{2,1} \rangle_{\xi} u_{3,2}^{(0)} - \langle O_2 \rangle_{\xi} u_{3,21}^{(0)} + \langle H_{23} O_2^{(0)} \rangle_{\xi},_1 u_2^{(0)} + \\
 & + \langle H_{23} O_2^{(0)} \rangle_{\xi} u_{2,1}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL,1}^{(0)} \langle C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) - \\
 & - H_{1,2} (-\langle O_1 \rangle_{\xi} u_{3,1}^{(0)} + \langle H_{13} O_1 \rangle_{\xi} u_1^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{13i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) - \\
 & - H_{2,1} (-\langle O_2 \rangle_{\xi} u_{3,2}^{(0)} + \langle H_{23} O_2 \rangle_{\xi} u_2^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle C_{23i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle_{\xi}) + \\
 & - C_{IJK3} C_{i3k3}^{-1} O_1 O_2 (\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle (2H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) \rangle_{\xi} + \\
 & + \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} \langle H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \rangle_{\xi} + \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} \langle H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \rangle_{\xi}) >_{\xi}; \tag{41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_I = & \varkappa (-O_1 O_2 (\varepsilon_{KL}^{(0)} \langle (2H_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha} (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) \rangle_{\xi} + \\
 & + \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} \langle H_{\beta} C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \rangle_{\xi} + \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} \langle H_{\alpha} C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \rangle_{\xi}) + \varkappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle.
 \end{aligned}$$

**Средняя система уравнений для многослойных оболочек.**

Подставляя выражения (40), (41) и следующие кинематические соотношения из (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} &= \frac{1}{H_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^{(0)} + \frac{1}{H_1 H_2} H_{\alpha,\beta} u_\beta^{(0)} + \frac{1}{H_\alpha} u_3^{(0)} H_{\alpha 3}; \\ \varepsilon_{12}^{(0)} &= \frac{1}{2H_1 H_2} (u_{1,2}^{(0)} H_1 - u_1^{(0)} H_{1,2} + u_{2,1}^{(0)} H_2 - u_2^{(0)} H_{2,1}) \end{aligned} \quad (42)$$

в систему (39), получаем итоговую систему уравнений теории оболочек относительно трех неизвестных функций  $u_I^{(0)}$  и  $u_3^{(0)}$ .

**Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в оболочке.** После того как решена осредненная система уравнений (39) и найдены функции  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ , вычисляем деформации (42), а затем напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$  (23). Сдвиговые напряжения  $\sigma_{I3}^{(0)}$  и поперечное напряжение  $\sigma_{33}^{(0)}$ , как было установлено, в оболочке тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются, согласно (33), у следующего члена асимптотического разложения —  $\sigma_{I3}^{(1)}$ . Поэтому с точностью до членов порядка  $\varkappa^2$  выражение для сдвиговых напряжений в оболочке имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= \varkappa (-O_1 O_2 \langle (H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} \rangle + \\ &+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(0)} \rangle_\xi) + \varkappa^2 (-O_1 O_2 \langle (H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} + \\ &+ (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(1)} + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(1)} \rangle_\xi), \end{aligned}$$

где функции  $\sigma_{IJ}^{(0)}$  вычисляются по (23),  $\sigma_{I3}^{(1)}$  — по (33),  $\sigma_{\beta\beta}^{(1)}$  — по формулам (37).

Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение — это значение  $\sigma_{33}^{(2)}$ , которое вычисляются согласно (33), (34):

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \varkappa^2 (-O_1 O_2 \langle (H_2 \sigma_{13}^{(1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(1)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(1)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(1)} \rangle_\xi) + \\ &+ \varkappa^3 (-O_1 O_2 \langle (H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(2)} + \\ &+ (H_{13} H_2 + H_{12} H_{13}) \sigma_{33}^{(2)} \rangle_\xi - (p_- + O_1 O_2 \Delta p(\xi + 0, 5))). \end{aligned}$$

Таким образом, разработанная асимптотическая теория тонких оболочек позволяет найти шесть компонент тензора напряжений с математической степенью точности, т. е. полученные соотношения для напряжений в оболочке представляют собой асимптотически точное выражение напряжений общей трехмерной теории упругости.

**Выводы.** Разработанная авторами асимптотическая теория тонких многослойных анизотропных оболочек построена без каких-



либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине на основе анализа уравнений трехмерной теории оболочек в криволинейной системе координат. В рамках предложенной теории сформулированы и решены локальные задачи теории упругости нулевого, первого, второго и третьего приближений. Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек, полученные с помощью разработанной теории, для случая ортотропии формально в точности совпадают с осредненными уравнениями теории оболочек Кирхгофа — Лява.

Разработанная теория позволяет найти распределение шести компонент тензора напряжений в оболочке.

*Исследование выполнено за счет гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-5961.2015.8).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.
- [2] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.
- [3] Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2011, т. 4, № 2, с. 128–139.
- [4] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.
- [5] Акимова Е. А., Назаров С. А., Чечкин Г. А. Асимптотика решения задачи о деформации произвольной локально периодической пластины. Тр. Моск. математ. о-ва, 65, Москва, УРСС, 2004, с. 3–34; англ. пер.: Akimova E.A., Nazarov S.A., Chechkin G. A. Asymptotics of the Solution of the Problem of Deformation of an Arbitrary Locally Periodic thin Plate, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 2004, 1–29.
- [6] Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.
- [7] Зверьяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит. *Прикладная математика и механика*, 2003, т. 67, вып. 3, с. 472–483.
- [8] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Structures*, 1984, vol. 20 (4), pp. 333–350.
- [9] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Докл. АН СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.
- [10] Levinski T., Telega J.J. *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.
- [11] Kolpakov A.G. *Homogenized Models for Thin-Walled Nonhomogeneous Structures with Initial Stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.
- [12] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1984, 336 с.

- [13] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984. 356 с.
- [14] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.
- [15] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.
- [16] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.
- [17] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.
- [18] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites under High Temperatures*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 1999, 347 p.
- [19] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.
- [20] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
- [21] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
- [22] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование: электронное научно-техническое издание*, 2014, № 10, с. 359–382. doi: 10.7463/1014.0730105.
- [23] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.
- [24] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>
- [25] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 580 с.

Статья поступила в редакцию 05.05.2015.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Шалыгин И.С. Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1406.html>

**Димитриенко Юрий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное мо-

делирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 300 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

**Губарева Елена Александровна** — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva\_ea@pochta.ru

**Шалыгин Иван Сергеевич** — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: ishalygin@yandex.ru

## Thin shells theory based on the asymptotic analysis of three-dimensional equations of the elasticity theory

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, I.S. Shalygin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article presents main relations for a new theory of thin multilayer anisotropic shells. The main equations of the shell theory suggested were deduced from general three-dimensional theory of elasticity by means of asymptotic expansions over small parameter without any hypothesis concerning displacement and stress distribution over thickness. It is shown that the averaged problem of the shell theory developed proves to be similar to the Kirchhoff—Love shell theory, but there are some differences in constitutive relations, that contain derivatives for membrane strains. The method suggested allows one to calculate all six stress tensor components including transverse normal stresses and stresses of interlayer shear of thin elastic shells.*

**Keywords:** viscoelastic composites laminated fibrous composites, elastic-dissipative properties, steady vibrations, tangent of loss angle, complex elastic modules, method of asymptotic averaging.

### REFERENCES

- [1] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1988, vol. 24, no. 4, pp. 698–704.
- [2] Sheshenin S.V. *Izv. RAN. MTT — Proc. of the Russ. Acad. Sci. Mech. Rigid Body*, 2006, no. 6, pp. 71–79.
- [3] Sheshenin S.V., Khodos O.A. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoi sredy — Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 128–139.
- [4] Nazarov S.A., Sweers G.H., Slutskij A.S. *Matematicheskiy sbornik — Sbornik: Mathematics.*, 2011, vol. 202, no. 8, pp. 41–80.
- [5] Akimova E.A., Nazarov S.A., Chechkin G.A. Asymptotics of the solution of the problem of deformation of an arbitrary locally periodic thin plate. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 2004, pp. 1–29.
- [6] Zveryaev E.M., Makarov G.I. *PMM — J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 308–321.
- [7] Zveryaev E.M. *PMM — J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, iss. 3, pp. 472–483.
- [8] Kohn R.V., Vogelyus M. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.
- [9] Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Dokl. AN SSSR — Reports of Acad. Sci. USSR*, 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065.
- [10] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.
- [11] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 228 p.
- [12] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moscow, Lomonosov MST Publ., 1984, 336 p.
- [13] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of processes in periodic media]*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.
- [14] Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Moscow, Mir Publ., 1984, 471 p. (in Russ.).

- [15] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.
- [16] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.
- [17] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe Modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.
- [18] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites under High Temperatures*. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 1999, 347 p.
- [19] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
- [20] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy — Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
- [21] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [22] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7463/1014.0730105. pp. 359–382.
- [23] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.
- [24] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>
- [25] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

**Dimitrienko Yu.I.** (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci.(Phys. & Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

**Gubareva E.A.** (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. Author 40 scientific publications in the field of composite mechanics, asymptotic analysis, contact mechanics. e-mail: gubareva\_ea@pochta.ru

**Shalygin I.S.** (b. 1993) student of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. e-mail: ishalygin@yandex.ru