УДК 536.24

Применение метода возмущений и функций чувствительности в задаче оптимизации систем с распределенными параметрами

© А.Ю. Бушуев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Создание эффективных методов оптимизации важно для решения реальных инженерных задач. Разработан способ построения функции чувствительности для решения задачи оптимизации упругой конструкции. Предложен итерационный алгоритм оптимизации систем, качество которых описывается дробно-линейными функционалами с ограничениями на управления. Алгоритм основан на процедуре линеаризации и использует функции чувствительности.

Ключевые слова: *функции чувствительности, оптимизация, итерационный алгоритм, системы с распределенными параметрами.*

Введение. Одним из направлений, развиваемым в последнее время для решения разнообразных задач анализа и синтеза сложных систем, является применение аппарата функций чувствительности (ФЧ). Анализ чувствительности основан на изучении влияния изменения параметров исследуемой системы на функцию ее состояния или на функционал, отражающий качество или эффективность ее поведения. Из этого следуют разные определения ФЧ. В одних задачах под ФЧ понимают частные производные от функции состояния системы или процесса по варьируемым параметрам, в других — это функция, численно равная относительному изменению функционала при единичном изменении управления.

Знание ФЧ необходимо при проектировании сложных технических систем и конструкций [1–6], для решения задач идентификации нестационарных процессов в ядерной технике [7] и механике [8–10], оптимизации материалов [11], а также разнообразных задач в сфере управления. Например, при организации оптимального размещения производства с учетом экологических требований, оценке экономических затрат на восстановление окружающей среды, нарушаемой загрязнениями предприятий [12].

Для решения реальных инженерных задач актуальна разработка эффективных методов оптимизации. В данной работе предлагается итерационный алгоритм решения задачи оптимизации одного класса систем с распределенными параметрами, основанный на теории возмущений [12] и использующий ФЧ.

Постановка задачи и построение ФЧ. Предположим, что исследуемая система описывается уравнением состояния в операторной форме:

$$Lf = 0. \tag{1}$$

Уравнение возмущенной системы имеет вид

$$L'f' = 0. \tag{2}$$

Возмущение проводится путем изменения управления $u(x)$ на $\delta u(x)$, причем

$$L' = L + \delta L; \quad \left(L + \delta L\right) f' = Lf' + \delta L f' = 0.$$

Умножим скалярно последнее равенство на сопряженную функцию f^*:

$$\left\langle f^*, Lf' \right\rangle + \left\langle f^*, \ \delta L f \right\rangle = 0.$$

Используя тождество Лагранжа

$$\left\langle f^*, Lf' \right\rangle = \left\langle f', L^* f^* \right\rangle = 0$$

и учитывая, что $L^* f^* = 0$ (если в уравнение подставляется решение), получаем основное соотношение теории возмущений:

$$\left\langle f^*, \ \delta L f' \right\rangle = 0$$

или (в случае малых возмущений)

$$\left\langle f^*, \delta L f \right\rangle = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) можно использовать для построения ФЧ при задании оператора L и функционала задачи.

Рассмотрим построение ФЧ для задачи свободных поперечных колебаний консольно закрепленной балки переменного сечения. В качестве целевого функционала выберем первую собственную частоту колебаний p конструкции, в качестве «управления» — площадь поперечного сечения $S(x)$.

При ряде допущений [13] дифференциальные уравнения форм поперечных колебаний стержня имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{df_1}{dx} = f_2; \\
\frac{df_2}{dx} = \frac{-f_3}{EJ(x)}; \\
\frac{df_3}{dx} = f_4; \\
\frac{df_4}{dx} = -S(x)\rho p^2 f_1.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $f_1 = v$ — поперечные смещения стержня; $J(x)$ — момент инерции сечений относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба; ρ, E — плотность и модуль упругости Юнга материала стержня; l — длина стержня; $f_2 = \dfrac{dv}{dx}$ — угол поворота сечения стержня; $f_3 = -EJ(x)\dfrac{d^2v}{dx^2}$ — изгибающий момент; $f_4 = -\dfrac{d}{dx}\left(EJ(x)\dfrac{d^2v}{dx^2}\right)$ — поперечная сила [14].

Граничные условия запишем в следующем виде:

$$f_1(0) = f_2(0) = 0;$$
$$f_3(l) = f_4(l) = 0.$$

Требуется выбрать закон изменения площади сечения стержня $S(x)$ по его длине из условия максимума частоты p при заданном объеме.

Учитывая, что в (4) оператор L самосопряженный, имеем

$$\overset{*}{f}_1 = f_4; \overset{*}{f}_2 = -f_3;$$
$$\overset{*}{f}_3 = f_2; \overset{*}{f}_4 = -f_1.$$

Тогда из (3) определим выражение для функции чувствительности:

$$\Psi_s^p = \left.\frac{\delta p}{\delta S(x)}\right|_x = \frac{1}{pJ(x)}\frac{\delta J(x)}{\delta S(x)}(f_3)^2 + \rho p(f_1)^2.$$

Для изопериметрической задачи нахождения максимума частоты при заданном объеме условие оптимальности имеет вид

$$\Psi_s^p = \text{const}$$

и может быть использовано для оптимизации конструкции.

Рассмотрим задачу в общем виде. Пусть требуется найти управление $u(x)$ для системы, эффективность которой определяется дробно-линейным функционалом вида

$$F_0 = \frac{\int_0^l \varphi_1(u, f)dx}{\int_0^l \varphi_2(u, f)dx} \tag{5}$$

при условии ограничений, наложенных на значения других функционалов

$$F_i^- \leqslant F_i \leqslant F_i^+, \quad i = \overline{1, n},$$

и на управление

$$u_1 \leqslant u(x) \leqslant u_2.$$

Функционалами вида (5) описываются, например, частота собственных колебаний конструкции, некоторые характеристики прочности и устойчивости.

Алгоритм оптимизации систем с распределенными параметрами. Для решения поставленной задачи предлагается итерационный алгоритм. При этом наиболее трудоемким этапом является определение вариаций всех функционалов по управлению:

$$\frac{\delta F_i}{F_i} = \int_0^l \left[\left(\frac{\delta\varphi_{1i}^u}{a_i} - \frac{\delta\varphi_{2i}^u}{b_i} \right) + \left(\frac{\delta\varphi_{1i}^f}{a_i} - \frac{\delta\varphi_{2i}^f}{b_i} \right) \frac{\delta f}{\delta u} \right] \delta u \delta x, \tag{6}$$

где $F_i = a_i / b_i$.

Вследствие линейности функционала F_i по отношению к $\delta u(x)$ можно записать

$$\frac{\delta F_i}{F_i} = \int_0^l \Psi_{F_i} \delta u(x) \delta x, \tag{7}$$

где

$$\Psi_{F_i}(x) = \left(\frac{\delta\varphi_{1i}^u}{a_i} - \frac{\delta\varphi_{2i}^u}{b_i} \right) + \left(\frac{\delta\varphi_{1i}^f}{a_i} - \frac{\delta\varphi_{2i}^f}{b_i} \right) \frac{\delta f}{\delta u}$$

есть ФЧ функционала F_i по отношению к управлению $u(x)$; $\delta\varphi_{1i}^u$, $\delta\varphi_{2i}^u$ — вариации функций φ_{1i} и φ_{2i} по u; $\delta\varphi_{1i}^f$, $\delta\varphi_{2i}^f$ — вариации функций φ_{1i} и φ_{2i} по f.

В начале итерационного цикла из решения (1) и (2) находится функция состояния f и сопряженная функция f^*.

Итерационный процесс решения задачи поиска оптимального управления $u(x)$ разбивается на несколько этапов. На первом этапе принимаем

$$\delta u_1(x) = \alpha \Psi_{F_0} u(x) \qquad (\alpha = \text{const}) \tag{8}$$

и получаем некоторое приращение функционала F_0, равное δF_0. При этом другие функционалы также испытывают изменения. Если эти изменения приводят к выходу значений функционалов за допустимые пределы, то на втором этапе итерационного цикла находят такое значение вариации управления

$$\delta u_2(x) = \left(\sum_i \beta_i \Psi_{F_i}\right) u(x), \tag{9}$$

при котором добавка к функционалу F_0, полученная на первом этапе итерационного цикла, сохраняется, а значения других функционалов возвращаются в свои пределы, т. е.

$$\begin{gathered} \int_0^l \Psi_{F_0} \delta u_2(x) \delta x = 0; \\ \int_0^l \Psi_{F_i} \delta u_2(x) \delta x = -\delta F_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{10}$$

Если после выполнения первых двух этапов значение управления $u_2(x) = u(x) + \delta u_1(x) + \delta u_2(x)$ выходит за допустимые пределы $u_1 \leqslant \leqslant u_2(x) \leqslant u_2$, тогда на третьем этапе итерационного цикла принимается следующее решение:

$$u_3(x) = \begin{cases} u_2(x), & \text{если } u_1 \leqslant u_2(x) \leqslant u_2; \\ u_2, & \text{если } u_2(x) > u_2; \\ u_1, & \text{если } u_2(x) < u_1. \end{cases} \tag{11}$$

При этом возникают изменения всех функционалов, определяемые как

$$\int_0^l \Psi_{F_i} \left(u_3(x) - u_2(x)\right) dx = \delta F_i, \quad i = \overline{0, n}. \tag{12}$$

Для восстановления, достигнутого на первом этапе цикла итерации оптимизируемого функционала и возвращения значения других функционалов в допустимые пределы, проводится четвертый этап вариации управления в области Vg, где не достигнуты граничные значения u_1 и u_2:

$$\begin{gathered} \delta u_3(x) = \left(\sum_i \beta_i \Psi_{F_i}\right) u(x); \\ \int_{Vg} \Psi_{F_i} \delta u_3(x) dx = -\delta F_i. \end{gathered} \tag{13}$$

Коэффициенты β_i определяются из системы уравнений (13).

Далее определяется управление:

$$u_4(x) = \begin{cases} u_3(x) + \delta u_3, & \text{если } x \in Vg; \\ u_3(x), & \text{если } x \notin Vg. \end{cases} \tag{14}$$

В результате в каждом цикле итерации получается какое-то новое управление $u_н(x)$, которое обеспечивает некоторое улучшение значения оптимизируемого функционала F_0 при сохранении допустимых значений других функционалов F_i.

Реальные значения всех функционалов вычисляются в начале следующего цикла итерации после повторного решения систем уравнений (1) и (2).

Вычисленные значения функционалов могут отличаться от прогнозируемых. Чтобы различие было не слишком велико, ставится условие

$$\frac{u_{ст}(x) - u_н(x)}{u_{ст}(x)} \leqslant \beta. \tag{15}$$

По мере приближения к экстремальному значению коэффициенты α и β последовательно снижаются. При невыполнении неравенства (15) снижается значение α и определение $u_н(x)$ на данном цикле повторяется.

Критерием окончания решения служит выполнение условий

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Psi_{F_i} = 0, \quad \text{если } u_1 \leqslant u(x) \leqslant u_2; \\ &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Psi_{F_i} < 0, \quad \text{если } u(x) = u_1; \\ &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Psi_{F_i} > 0, \quad \text{если } u(x) = u_2, \end{aligned} \tag{16}$$

где λ_i — множители Лагранжа.

Вывод. Разработан способ построения ФЧ для решения задачи оптимизации упругой конструкции, в котором используются теория возмущений и сопряженные функции. Предложен итерационный алгоритм решения задачи оптимизации систем, качество которых описывается дробно-линейными функционалами. Алгоритм основан на методе линеаризации и использует функции чувствительности. Дальнейшее развитие исследований может быть связано с реализацией алгоритма для конкретных прикладных задач. Для этого необходимо задание оператора *L*, описывающего состояние исследуемой системы, и построение ФЧ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хог Э., Чой К., Комков В. *Анализ чувствительности при проектировании конструкций*. Москва, Мир, 1988.

[2] Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. *Механика больших космических конструкций*. Москва, Факториал, 1997.

[3] Бушуев А.Ю., Горский В.В. Применение аппарата функций чувствительности и двухконтурного алгоритма в задачах синтеза многослойных конструкций. *Инженерно-физический журнал*, 2000, т. 73, № 1, с. 155–159.

[4] Троицкий А. В. *Математические модели и методы анализа чувствительности в задачах оптимизации конструкций роторов*. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2006.

[5] Тушев О.Н., Березовский А.В. Чувствительность спектральных характеристик конечно-элементных моделей конструкций ракетно-космической техники. *Оборонная техника*, 2007, № 3, 4, с. 87–93.

[6] Павлов С.П. *Математическое моделирование и оптимизация формы термоупругих тел*. Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Саратов, 2009.

[7] Пупко В.Я., Зродников А.В., Лихачев Ю.И. *Метод сопряженных функций в инженерно-физических исследованиях*. Москва, Энергоатомиздат, 1984.

[8] Бушуев А.Ю., Яковлев Д.О. О подходе к оптимизации упругих конструкций по частотным характеристикам. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 66–69.

[9] Бушуев А.Ю., Фарафонов Б.А. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2 (2), с. 101–114.

[10] Городецкий Ю.И. *Функции чувствительности и динамика сложных механических систем*. Нижний Новгород, 2006.

[11] Димитриенко Ю.И., Дроголюб А.Н., Губарева Е.А. Оптимизация многокомпонентных дисперсно-армированных композитов на основе сплайн-аппроксимации. *Наука и образование. Электронное научное издание*, 2015, № 2. doi: 10.7463/0215.0757079

[12] Марчук Г.И *Сопряженные уравнения и анализ сложных систем*. Москва, Наука, 1992.

[13] Филиппов А.П. Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты. *Прикладная механика*, АН УССР, 1971, т. 7, вып. 10.

[14] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердого тела.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

Статья поступила в редакцию 14.06.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Бушуев А.Ю. Применение метода возмущений и функций чувствительности в задаче оптимизации систем с распределенными параметрами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 6.

URL: http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1411.html

Бушуев Александр Юрьевич родился в 1951 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1974 г., в 1985 г. — МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана, специалист в области прикладной математики.
e-mail: a.ju.bushuev@yandex.ru

Application of perturbation method and sensitivity functions to the problem of optimizing the systems with distributed parameters

© A.Yu. Bushuev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Creating of effective optimization methods is important for solving real engineering problems. In this paper we developed a method for constructing the sensitivity function to solve the problem of optimizing of the elastic construction. Moreover, for optimizing of the systems we offer an iterative algorithm, which is based on the linearization procedure and the sensitivity function. The quality of these systems is described by a fractional-linear functional with control restrictions.

Keywords: *sensitivity functions, optimization, iterative algorithm, systems with distributed parameters*

REFERENCES

[1] Hog E., Choi K., Komkov V. *Analiz chuvstvitelnosti pri proektirovanii konstruktsiy* [The sensitivity analysis in the structures design]. Moscow, Mir Publ., 1988 [in Russian].

[2] Banichuk N.V., Karpov I.I., Klimov D.M. *Mekhanika bolshikh kosmicheskikh konstruktsiy* [The mechanics of large space structures]. Moscow, Factorial Publ., 1997.

[3] Bushuev A.Yu., Gorskiy V.V. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2000, vol. 73, no. 1, pp. 155–159.

[4] Troitskiy A.V. *Matematicheskie modeli i metody analiza chuvstvitelnosti v zadachakh optimizatsii konstruktsiy rotorov. Diss. .... kand. tekhn. nauk* [Mathematical models and methods of sensitivity analysis in optimization problems of rotor construction. Cand. eng. sci. diss.]. Moscow, 2006.

[5] Tushev O.N., Berezovskiy A.V. *Oboronnaya tekhnika — Defense Engineering,* 2007, no. 3–4, pp. 87–93.

[6] Pavlov S.P. *Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya formy termouprugikh tel. Diss. .... dokt. fiz.-mat. nauk* [Mathematical modeling and optimization of thermoelastic bodies form. Doct. phys.- math. sci. diss.]. Saratov, 2009.

[7] Pupko V.Ya., Zrodnikov A.V., Likhachev Yu.I. *Metod sopryazhennykh funktsiy v inzhenerno-fizicheskikh issledovaniyakh* [The method of conjugate functions in engineering physics research]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984.

[8] Bushuev A.Yu., Yakovlev D.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical Univyrsity. Ser. Natural Sciences*, 2011, special issue “Mathematical modeling”, pp. 66–69.

[9] Bushuev A.Yu., Farafonov B.A. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, vol. 2, no. 2 (2), pp. 101–114.

[10] Gorodetskiy Yu.I. *Funktsii chuvstvitelnosti i dinamika slozhnykh mekhanicheskikh system* [Sensitivity function and dynamics of complex mechanical systems]. Nizhniy Novgorod, 2006.

[11] Dimitrienko Yu.I., Drogolub A.N., Gubareva E.A. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe izdanie – Science and Education. Electronic Journal*, 2015, no. 2. doi: 10.7463/0215.0757079 http://technomag.bmstu.ru/doc/757079.html
[12] Marchuk G.I. Sopryazhennye uravneniya i analiz slozhnykh system [Conjugate equations and complex systems analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1992.
[13] Filippov A.P. *Prikladnaya mekhanika — Applied mechanics*, Academy of Sciences of Ukraine, 1971, vol. 7, issue 10.
[14] DimitrienkoYu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

Bushuev A.Yu. (b. 1951) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 1974 and Lomonosov Moscow State University in 1985. Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of applied mathematics. e-mail: a.ju.bushuev@yandex.ru