

## **К вопросу о точности инженерных методов расчета удельного теплового потока в ламинарном пограничном слое на непроницаемой «стенке» на поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке**

© В.В. Горский<sup>1,2</sup>, В.А. Сысенко<sup>1</sup>, А.А. Блохина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>АО «ВПК «НПО Машиностроения»», г. Реутов, 143966, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Приведены результаты оценки точности для инженерной методики расчета удельного теплового потока в ламинарном пограничном слое на поверхности полусферы. В развитие решения, полученного И.Н. Мурзиновым, предлагается аналогичная инженерная методика повышенной точности с учетом современных научно-технических достижений. В частности, существенно расширен диапазон изменения таких определяющих факторов, как число Маха в набегающем воздушном потоке, давление торможения этого потока, энтальпия.*

**Ключевые слова:** тепловой поток, ламинарное течение, сверхзвуковой поток, пограничный слой, инженерные методы.

**Введение.** Сферические затупления относятся к наиболее высокотемпературным элементам конструкции летательных аппаратов. Оценка точности расчета параметров конвективного теплообмена на поверхности полусферы представляет значительный практический интерес. При ламинарном режиме течения газа в пограничном слое решение данной задачи можно получить с высокой точностью путем численного решения уравнений пограничного слоя. Однако с точки зрения инженерной практики крайне важно иметь достаточно простые алгебраические формулы для расчета распределения тепловой нагрузки по поверхности полусферы. Наиболее естественный подход к решению этой задачи состоит в получении систематических численных решений уравнений ламинарного пограничного слоя с последующей аппроксимацией полученных при этом результатов. В середине XX в. такая задача, в частности, была решена И.Н. Мурзиновым [1], полученная им простая инженерная формула расчета повсеместно используется на практике. В литературных источниках при этом утверждается (см., например, работу [2]), что данная формула характеризуется высокой точностью на всей поверхности полусферы, однако конкретных данных, подтверждающих этот вывод, при этом нигде не приводится. За время, прошедшее с момента опубликования работы [1], методы решения уравнений пограничного слоя получили

значительное развитие. В связи с этим интерес представляет решение задачи, которую решал И.Н. Мурзинов, но на современной научно-технической основе и в существенно более широких диапазонах изменения так называемых определяющих факторов. Изложению результатов исследований, выполненных в этом направлении, посвящена данная работа.

Расчетно-теоретические исследования, результаты которых приводятся далее, получены в широком диапазоне изменения определяющих факторов: числа Маха  $M_\infty$  в набегающем воздушном потоке, давления торможения  $p_0$  этого потока и энтальпийного фактора  $R_h$ , под которым понимается отношение энтальпии воздуха при температуре стенки к энтальпии торможения газового потока (под термином «стенка» понимается поверхность тела, обтекаемая набегающим на него газовым потоком).

Исследования проводили для многокомпонентной газовой смеси в пограничном слое на абсолютно каталитичной стенке, находящейся в состоянии термохимического равновесия. Расчет диффузионного теплопереноса выполнен в рамках уравнений Стефана — Максвелла. Граничные условия на внешней границе пограничного слоя формировались с учетом расчетных соотношений работы [3].

В процессе проведения исследований принимали следующие условия и допущения:

- химический состав газовой смеси ограничен набором химических веществ  $O, O_2, N, N_2, NO, Ar$ , образованных из химических элементов кислорода  $O$ , азота  $N$  и аргона  $Ar$ ;

- в нормальных условиях воздух характеризуется мольным химическим составом [4]

$$\kappa_{O_2} = 0,2095, \quad \kappa_{N_2} = 0,7808, \quad \kappa_{Ar} = 0,0097;$$

- что область изменения определяющих параметров задана в виде  $M_\infty \in [4, 25]$ ,  $p_0 \in [0, 001, p_{\max}]$ ,  $R_h \in [R_{h,\min}, R_{h,\max}]$ ;

- радиус сферы равен 0,1 м;

- для расчета переносных свойств многокомпонентной газовой смеси использован метод Гиршфельдера [5];

- применены потенциальная функция межмолекулярного взаимодействия Леннарда — Джонса [5] и методика расчета параметров этой функции [6], основанная на современных расчетно-теоретических данных по вязкости воздуха, находящегося в состоянии термохимического равновесия [7, 8];

- данные по параметрам течения идеального газа на стенке получены численным решением уравнений Эйлера и перенесены в за-

дачу решения уравнений пограничного слоя методом сплайновой аппроксимации [9];

- расчет концентраций химических элементов в пограничном слое выполнен по методу работы [10];
- для организации итерационного процесса между расчетом химического состава газовой смеси в пограничном слое и решением уравнения сохранения энергии в нем применен метод работы [11];
- для решения уравнений пограничного слоя на неравномерной сетке, организованной по методу работы [13], использованы методы скалярной и матричной прогонки [12];
- давление торможения  $p_{\max}$  равно 10 МПа при  $M_{\infty} \geq 10$  и 1 МПа в противном случае.

В табл. 1 приведены значения «определяющих факторов», которые использовались при проведении систематических численных исследований. При этом указанные значения числа Рейнольдса  $Re_{\infty, R, Sph}$ , рассчитанные по параметрам газа в набегающем потоке и радиусу сферы  $R_{Sph}$ , взяты из литературы,  $R_{h, \min}$  — значение энтальпийного фактора, соответствующее температуре стенки, равной примерно 300 К;  $R_{h, \max}$  — минимум между 0,7 и значением энтальпийного фактора, соответствующим температуре кипения атомарного углерода.

Таблица 1

**Значения «определяющих факторов», которые использовались при проведении систематических численных исследований**

№	$M_{\infty}$	$P_0$ , МПа	$Re_{\infty, R, Sph} \cdot 10^{-6}$	$R_{h, \min}$	$R_{h, \max}$	№	$M_{\infty}$	$P_0$ , МПа	$Re_{\infty, R, Sph} \cdot 10^{-6}$	$R_{h, \min}$	$R_{h, \max}$
1	25	$10^{-3}$	0,00111	0,01	0,3	7	8	$10^{-3}$	0,00288	0,08	0,7
2	25	0,1	0,075	0,01	0,3	8	8	0,1	0,304	0,08	0,7
3	25	10,0	10,1	0,01	0,3	9	8	1,0	3,23	0,08	0,7
4	15	$10^{-3}$	0,00173	0,03	0,7	10	4	$10^{-3}$	0,00496	0,27	0,7
5	15	0,1	0,142	0,03	0,7	11	4	0,1	0,639	0,27	0,7
6	15	10,0	15,4	0,03	0,7	12	4	1,0	5,32	0,27	0,7

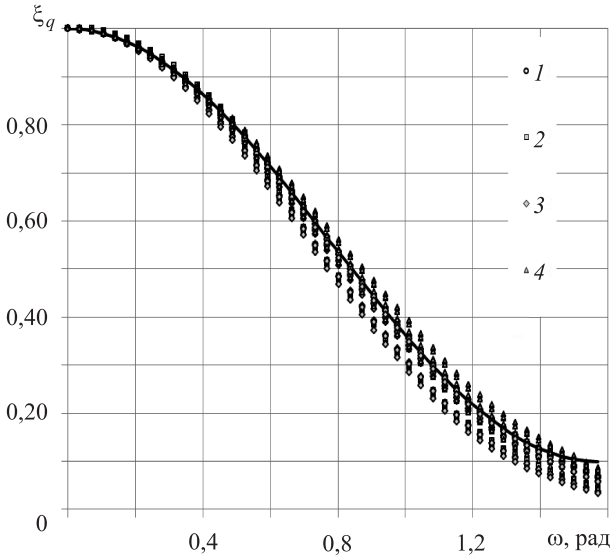
**Результаты расчетно-теоретических исследований.** Удельный тепловой поток:

$$\xi_q = \xi_{q, Lit}(\omega) = \frac{q_{w, n}(\omega)}{q_{w, n}(0)} = 0,55 + 0,45 \cos(2\omega), \quad \omega \in [0, \pi/2], \quad (1)$$

где  $q_{w, n}$  — удельный тепловой поток на непроницаемой поверхности полусферы;  $\omega$  — центральный угол, характеризующий положение

расчетного узла на поверхности полусферы относительно ее критической точки, в которой происходит полное торможение набегающего газового потока.

На рис. 1 приведены зависимость  $\xi_{q, \text{Num}}(\omega)$ , построенная по результатам систематических численных решений уравнений пограничного слоя (индекс Num), и кривая, построенная по формуле (1).



**Рис. 1.** Результаты расчета, полученные по формуле (1) (полужирная кривая), и численного решения уравнений пограничного слоя:

1 —  $M_\infty = 25$ ; 2 — 15; 3 — 8; 4 — 4

Как следует из анализа представленных данных, утверждение, что формула (1) характеризуется высокой точностью, не соответствует действительности. Поэтому представляется целесообразным получить инженерную методикку расчета, обладающую более высокой точностью.

Исследования показали, что задача может быть решена следующими способами:

- представлением функции  $\xi_q(\omega)$  в виде

$$\xi_q = \xi_{q, \text{Eng}}(\omega, M_\infty, R_h) = \xi_{q, \text{min}}(\omega, M_\infty) \left[ \frac{R_h}{R_{h, \text{min}}(M_\infty)} \right]^{-n(\omega, M_\infty)}; \quad (2)$$

- введением функции, определенной на области ее значений  $[0, 1]$ ,

$$\zeta(\omega) = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \cos^i(\omega) = \left( 1 - \sum_{i=2}^3 \zeta_i \right) \cos(\omega) + \sum_{i=2}^3 \zeta_i \cos^i(\omega); \quad (3)$$

• нахождением значений входящих в выражение (3) аппроксимационных коэффициентов  $\zeta_i$  по методу наименьших квадратов по отношению к значениям полученной в результате численного решения уравнений пограничного слоя функции

$$\frac{\xi_{q, \text{Num}}(\omega, M_\infty, p_0, R_{h, \text{min}}) - \xi_{q, \text{Num}}(\pi/2, M_\infty, p_0, R_{h, \text{min}})}{1 - \xi_{q, \text{Num}}(\pi/2, M_\infty, p_0, R_{h, \text{min}})},$$

• аппроксимацией функции  $\xi_{q, \text{Num}}(\pi/2, M_\infty, p_0, R_{h, \text{min}})$  формулой

$$\xi_{q, \text{Num}}(\pi/2, M_\infty, p_0, R_{h, \text{min}}) = F_q(M_\infty) = \sum_{i=1}^3 \zeta_{3+i} \lg^{i-1}(M_\infty); \quad (4)$$

• расчетом функции  $\xi_{q, \text{min}}(\omega, M_\infty)$  по формуле

$$\xi_{q, \text{min}}(\omega, M_\infty) = \zeta(\omega)[1 - F_q(M_\infty)] + F_q(M_\infty);$$

• аппроксимацией функции  $n(\omega, M_\infty)$  формулой

$$n(\omega, M_\infty) = \sum_{i=1}^2 [\zeta_{6+i} + \zeta_{8+i} \lg(M_\infty)] \omega^i; \quad (5)$$

• нахождением значений входящих в формулы (4) и (5) аппроксимационных коэффициентов  $\zeta_i$  в соответствии с методом наименьших квадратов [14].

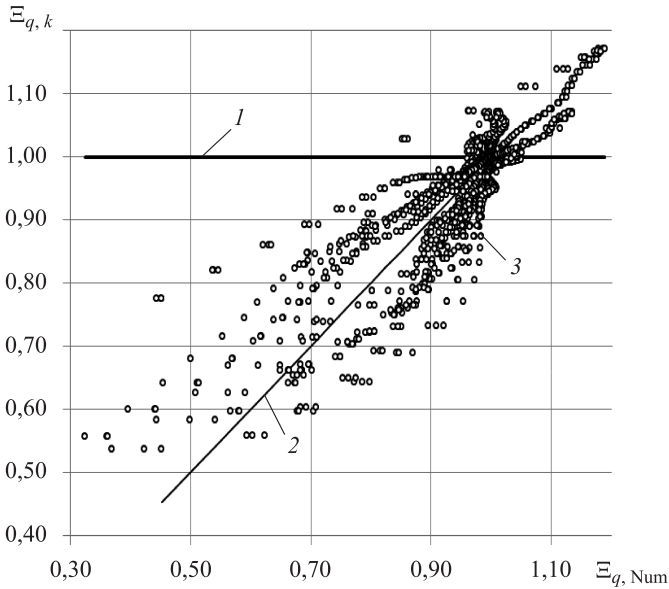
При этом зависимость от числа Маха в набегающем газовом потоке минимального энтальпийного фактора, соответствующего температуре «стенки», равной примерно 300 К, имеет вид

$$R_{h, \text{min}} = 2,8513 M_\infty^{-1,703}.$$

Оптимальные значения коэффициентов  $\zeta_i$  определяли с помощью одного из вариантов эвристического метода прямого поиска Хука — Дживса [15]:

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= 0,792662; & \zeta_3 &= 0,053948; & \zeta_4 &= 0,164727; \\ \zeta_5 &= -0,129594; & \zeta_6 &= 0,044803; & \zeta_7 &= -0,012728; \\ \zeta_8 &= 0,004817; & \zeta_9 &= 0,210395; & \zeta_{10} &= -0,140264. \end{aligned}$$

Соответствие результатов расчетов функций  $\xi_{q, Eng}(s)$  и  $\xi_{q, Lit}(s)$ , полученных с использованием инженерных формул (2) и (1), и аналогичных результатов  $\xi_{q, Num}(s)$ , полученных путем численного решения уравнений пограничного слоя, иллюстрирует рис. 2, где  $\Xi_{q, k} = \xi_{q, k} / \xi_{q, Lit}$ ,  $k = Lit, Eng, Num$ .



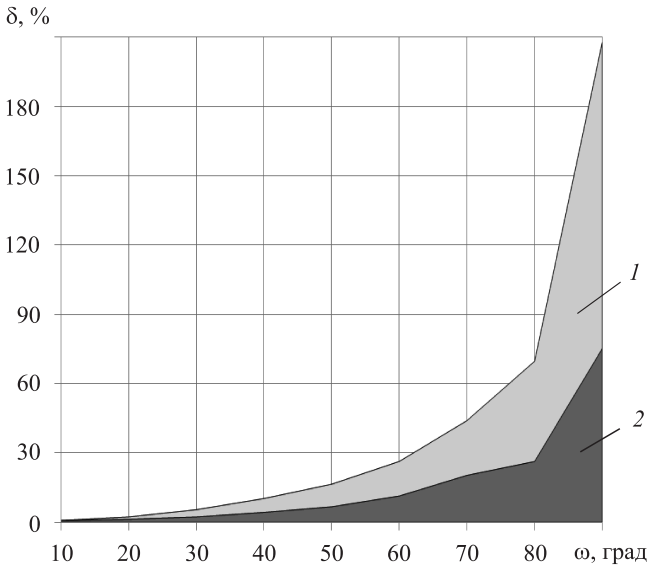
**Рис. 2.** Удельные тепловые потоки на полусфере, рассчитанные по инженерным формулам 1, 2 и полученные путем численного решения уравнений пограничного слоя 2:

1 —  $k = Lit$ ; 2 —  $Num$ ; 3 —  $Eng$

Из анализа приведенных на рис. 2 данных следует, что переход в инженерных расчетах от формулы (1) к формуле (2) позволяет качественно снизить погрешность расчета.

На рис. 3 приведен диапазон изменения погрешностей  $\delta$  расчета, соответствующих инженерным формулам (1) и (2).

Видно, что применение полученной в данной работе инженерной формулы (2) позволяет примерно в 3 раза снизить погрешность расчета по сравнению с формулой (1). Однако в окрестности значения центрального угла полусферы, равного  $\pi/2$ , обе формулы характеризуются значительными погрешностями, что является следствием стремления к нулю функции  $\xi_{k, Num}$  при больших значениях энтальпийного фактора.



**Рис. 3.** Диапазон изменения погрешностей вычисления  $\xi_q(\omega)$  по инженерным формулам:  
1 — формула (1), 2 — (2)

**Вывод.** Установлено, что широко используемая на практике инженерная формула, предназначенная для расчета конвективного теплообмена в ламинарном пограничном слое на полусфере, характеризуется недопустимо большими погрешностями. Переход к использованию предложенной в данной работе новой инженерной формулы позволяет существенно снизить указанную погрешность до уровня, приемлемого для большинства технических приложений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ  
(проект № 14-08-00971-а).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мурзинов И.Н. Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равновесно диссоциирующего воздуха. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1966, № 2, с. 184.
- [2] Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И. и др. *Конвективный теплообмен летательных аппаратов*. Москва, Физматлит, 2014, 377 с.
- [3] Горский В. В., Горская Н. А., Оленичева А. А. К вопросу о формировании граничных условий на внешней границе пограничного слоя. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/846.html>
- [4] Предводителей А.С., Ступоченко Е.В., Плешанов А.С. и др. *Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6 000° К и давлений от 0,00001 до 100 атмосфер)*. Москва, Вычислительный центр АН СССР, 1962, 268 с.

- [5] Гирифельдер Д., Кергис Ч., Берд Р. *Молекулярная теория газов и жидкостей*. Москва, Изд-во Иностранной литературы, 1961, 929 с.
- [6] Горский В.В., Федоров С.Н. Об одном подходе к расчету вязкости диссоциированных газовых смесей, образованных из кислорода, азота и углерода. *Инженерно-физический журнал*, 2007, т. 80, № 5, с. 97–101.
- [7] Соколова И.А. Коэффициенты переноса и интегралы столкновений воздуха и его компонент. В кн. *Физическая кинетика, Аэрофизические исследования*. Новосибирск: Ин-т теоретической и прикладной механики СО АН СССР. Сб. трудов, 1974, № 4, с. 39–104.
- [8] Capitelli M., Colonna G., Gorse C., D'Angola A. Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium. *The European Physical Journal*, 2000, no. 11, pp. 279.
- [9] Горский В.В. Метод сплайновой аппроксимации. *Журнал вычислительной математики и вычислительной физики РАН*, 2007, т. 47, № 6, с. 939–943.
- [10] Горский В.В., Сысенко В.А. Эффективный метод численного интегрирования уравнений, описывающих течение многокомпонентных высокотемпературных газовых смесей, находящихся в состоянии термохимического равновесия. *Журнал вычислительной математики и математической физики РАН*, 2009, т. 49, № 7, с. 1319.
- [11] Горский В.В., Забарко Д.А., Оленичева А.А. Исследование процесса уноса массы углеродного материала в рамках полной термохимической модели его разрушения для случая равновесного протекания химических реакций в пограничном слое. *Теплофизика высоких температур РАН*, 2012, т. 50, № 2, с. 1.
- [12] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. Москва, Наука, 1971, 552 с.
- [13] Пасконов В.М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя. *Численные методы в газовой динамике*. Москва, Изд-во Московского Университета, 1963, вып. 1, с. 110.
- [14] Линник Ю.В. *Метод наименьших квадратов*. Москва, Энергия, 1976.
- [15] Аоки М. *Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования*. Москва, Наука, 1977.
- [16] Горский В.В., Сысенко В.А. Моделирование расхода газа через ламинарный пограничный слой на поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 88–94.
- [17] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Строганов А.С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термомеханических процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 3–24.

Статья поступила в редакцию 19.05.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Горский В.В., Сысенко В.А., Блохина А.А. К вопросу о точности инженерных методов расчета удельного теплового потока в ламинарном пограничном слое на непроницаемой «стенке» на поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 6.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/teje/1412.html>



**Горский Валерий Владимирович** — д-р техн. наук, главный научный сотрудник АО «ВПК “НПО машиностроения”», с 1992 г. преподает в МГТУ им. Н. Э. Баумана, профессор. Автор более 150 научных работ.

**Сысенко Валентина Алексеевна** — канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела аэродинамики АО «ВПК “НПО машиностроения”». Автор 16 научных статей.

**Блохина Анна Александровна** — студентка МГТУ им. Н.Э. Баумана.

---

# On the accuracy of engineering methods for calculation of specific heat flow in laminar boundary layer on non-permeable “wall” of hemisphere surface in a supersonic gas flow

© V.V. Gorsky<sup>1,2</sup>, V.A Sysenko<sup>1</sup>, A.A Blokhina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>JSC MIC "NPO Mashinostroenia", Reutov town, 143966, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The research explored engineering methods for specific heat flow calculation in laminar boundary layer on non-permeable “wall” of hemisphere surface in a supersonic gas flow. In this paper we present the results of examining these methods and estimating their accuracy. The study delves into the ways of solving the problem, proposed by I.N. Murzinov and offers a similar engineering technique of high accuracy in accordance with modern scientific and technological achievements. Consequently, we to large extent expanded the variation range of such determining factors as Mach number in the incoming air stream, the brake pressure of this flow, enthalpy.*

**Keywords:** *specific heat flow, supersonic gas flow, laminar boundary layer, engineering methods.*

## REFERENCES

- [1] Murzinov I.N. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza — Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Fluid mechanics*, 1966, no. 2, p. 184.
  - [2] Zemlyansky B.A., Lunev V.V., Vlasov V.I., et al. *Konvektivnyy teploobmen letatelnykh apparatov* [Convective heat exchange of aircraft]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 377 p.
  - [3] Gorsky V. V., Gorskaya N. A., Olenicheva A. A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, issue 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/846.html>
  - [4] Predvoditelev A.S., Stupochenko E.V., Pleshanov A.S., et al. *Tablitsy termodinamicheskikh funktsiy vozdukha (dlya temperatur ot 200 do 60000 K i davlenii ot 0,00001 do 100 atmosfer)* [Tables of thermodynamic air functions (for temperature range from 200 to 60000 K and pressure range from 0,00001 to 100 atm)]. Moscow, Computer center of USSR AS, 1962, 268 p.
  - [5] Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B. *Molekuliarnaya teoriya gazov i zhidkostey* [Molecular theory of gases and liquids]. Moscow, Foreign literature Publ., 1961, 929 p. [in Russian].
  - [6] Gorsky V.V., Fedorov S.N. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal — Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2007, vol. 80, no. 5, pp. 97–101.
  - [7] Sokolova I.A. Koeffitsienty perenosa i integraly stolknoveniy vozdukha i ego komponent [Transfer coefficients and integrals of air and its components collisions]. In: *Fizicheskaya kinetika. Aerofizicheskie issledovaniya. Sb. trudov* [Physical kinetics. Aerophysical research. Collection of scientific papers]. Novosibirsk, Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB USSR AS, 1974, no. 4, pp. 39–104.
  - [8] Capitelli M., Colonna G., Gorse C., D’Angola A. Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium. *The European Physical Journal*, 2000, no. 11, p. 279.
-

- 
- [9] Gorsky V.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i vychislitel'noy fiziki RAN — Computational Mathematics and Mathematical Physics RAS*, 2007, vol. 47, no. 6, pp. 939 – 943.
- [10] Gorsky V.V., Sysenko V.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i vychislitel'noy fiziki RAN — Computational Mathematics and Mathematical Physics RAS*, 2009, vol. 49, no. 7, p. 1319.
- [11] Gorsky V.V., Zabarko D.A., Olenicheva A.A. *Teplofizika vysokikh temperatur RAN — High Temperature RAS*, 2012, vol. 50, no. 2, p. 1.
- [12] Samarsky A.A. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to difference scheme theory]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 552 p.
- [13] Paskonov V.M. Standartnaya programma dlya resheniya zadach pogranichnogo sloya [Standard program for boundary-layer tasks solving]. *Chislennyye metody v gazovoy dinamike* [Computational methods in gas dynamics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1963, vol. 1, p. 110.
- [14] Linnik U.V. *Metod naimenshikh kvadratov* [Least-squares method]. Moscow, Energia Publ., 1976.
- [15] Aoki M. *Vvedenie v metody optimizatsii. Osnovy i prilozheniya nelineynogo programmirovaniya* [Introduction to optimization techniques. Fundamentals and applications of nonlinear programming]. Moscow, Nauka Publ., 1977 [in Russian].
- [16] Gorsky V.V., Sysenko V.A. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 88–94.
- [17] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3, pp. 3–24.

**Gorsky V.V.**, Dr. Sci. (Eng.), main researcher in the research department of Scientific-Industrial Association "Mashinostroenie", Professor of Bauman Moscow State University. Author of more than 150 scientific publications.

**Sysenko V.A.**, Cand. Sci. (Eng.), senior researcher at Scientific-Industrial Association "Mashinostroenie". Author of 16 publications in the field of applied mathematics.

**Blokhina A.A.**, a student of Aerospace Department at Bauman Moscow State Technical University.

---