

## Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа при медленно меняющейся частоте вынужденных колебаний

© Д.А. Маслов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»,  
Москва, 111250, Россия

*В настоящее время волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из перспективных датчиков инерциальной информации, так как обладает высокой надежностью и малыми габаритными размерами при сравнительно низкой стоимости. Системы навигации и управления движением объектов различного назначения, построенные на базе ВТГ, имеют широкую область применения. Повышение точностных характеристик ВТГ — актуальное направление исследований. Задача идентификации параметров ВТГ связана с повышением точности ВТГ и направлена на определение погрешностей, вызываемых как производственными дефектами изготовления резонатора, так и нелинейностью колебаний. Известна методика, позволяющая определять наряду с параметрами линейной модели также и коэффициент нелинейности. В ней используется трудоемкая процедура измерений, проводимая при стационарных режимах вынужденных колебаний, соответствующих различным настраиваемым частотам генератора. Проведение таких измерений требует многочисленных переключений частот и ожиданий окончания переходных процессов. В данной работе предложена методика идентификации параметров гироскопа с учетом нелинейности при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний. Идентифицируемые параметры включают в себя разночастотность, разнодобротность, параметры внешнего воздействия на резонатор и коэффициент нелинейности. Данные параметры необходимы для контроля качества и совершенствования технологии изготовления гироскопа, а также для компенсации его дрейфа. Учет нелинейности колебаний резонатора позволяет проводить испытания при больших амплитудах колебаний, когда отношение сигнал/шум достаточно высокое, что способствует повышению точности определения параметров. Для оценки параметров полученной математической модели колебаний резонатора при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний применен алгоритм оптимальной фильтрации Калмана. Разработанная методика позволит автоматизировать процесс определения параметров гироскопа при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний и сократить время уточнения параметров работающего гироскопа.*

**Ключевые слова:** волновой твердотельный гироскоп, нелинейные колебания, идентификация параметров, фильтр Калмана

**Введение.** В основе функционирования волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) лежит физический принцип, заключающийся в инертных свойствах упругих волн, возбуждаемых в осесимметричных оболочках [1]. Основы теории ВТГ были заложены в работах [1–3]. Вопросы идентификации параметров гироскопов и методы по-

вышения точности ВТГ рассмотрены в работах [4–15]. Повысить точность гироскопа можно с помощью алгоритмической компенсации. Для этого необходимо знать параметры гироскопа.

Целью данного исследования является разработка методики определения параметров гироскопа с учетом нелинейности при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний. Данная методика позволит автоматизировать процесс определения параметров гироскопа при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний и сократить время уточнения параметров работающего гироскопа. Учет нелинейности обеспечит повышение точности определения параметров, что необходимо для контроля качества и совершенствования технологии изготовления гироскопа, а также для компенсации его дрейфа.

**Осреднение уравнений динамики резонатора ВТГ.** Рассмотрим уравнения динамики резонатора ВТГ для учета различных параметров, обусловленных разнообразными технологическими погрешностями его изготовления [3, 12]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -(c + h_c)x - (n + h_s)y - (\gamma + g_c)\dot{x} - (v + g_s)\dot{y} + \\ &+ \xi(x^2 + y^2)x - u_1 \sin \sigma(t) + u_2 \cos \sigma(t); \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -(c - h_c)y + (n - h_s)x - (\gamma - g_c)\dot{y} + (v - g_s)\dot{x} + \\ &+ \xi(x^2 + y^2)y - u_3 \sin \sigma(t) + u_4 \cos \sigma(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x, y$  — обобщенные координаты второй основной формы колебаний резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих одна от другой под углом  $45^\circ$ ;  $\omega_0$  — основная резонансная частота чувствительного элемента ВТГ;  $c, n$  — параметры позиционных сил;  $h_s = h^* \sin 4\alpha$ ,  $h_c = h^* \cos 4\alpha$ ,  $g_s = g^* \sin 4\beta$ ,  $g_c = g^* \cos 4\beta$  — компоненты, характеризующие упругую и вязкую анизотропию;  $h^*, g^*$  — модули разночастотности и разнодобротности;  $\alpha, \beta$  — углы ориентации главных осей жесткости и главных осей диссипации относительно отсчетных осей;  $\gamma$  — коэффициент демпфирования;  $v$  — безразмерная угловая скорость  $v \ll \omega_0$ ;  $u_1, u_2, u_3, u_4$  — нормализованные амплитуды величин, характеризующих амплитуды сигналов, возбуждающих колебания резонатора;  $\sigma(t)$  — настраиваемая фаза сигналов;  $\xi$  — параметр, характеризующий нелинейные эффекты резонатора.

Нелинейные относительно  $x$  и  $y$  слагаемые  $\xi(x^2 + y^2)x$  и  $\xi(x^2 + y^2)y$  получены в работе [3] при рассмотрении классического маятника Фуко, а также в работе [16] при учете нелинейности коле-

баний электрических зарядов в контуре управления при подаче опорного напряжения на электроды и в работе [12] при предположении, что упругие свойства материала резонатора описываются нелинейным законом Гука.

В режиме мягкого резонансного воздействия частота внешнего возбуждения  $\omega(t) = \dot{\sigma}(t)$  медленно изменяется вблизи основной резонансной частоты колебаний гироскопа:

$$\omega(t) = \omega_0(t) - \mu(t), \quad (2)$$

где  $|\mu(t)| \ll \omega_0(t)$ .

Решение системы уравнений (1) с медленно изменяющейся частотой возбуждения вынужденных колебаний (2) будем искать в виде [17]

$$\begin{aligned} x(t, \tau) &= x_0(t, \tau) + x_1(t, \tau); \\ y(t, \tau) &= y_0(t, \tau) + y_1(t, \tau) \end{aligned}$$

при

$$\begin{aligned} |x_1| &\ll |x_0|; \quad |y_1| \ll |y_0|; \\ x_0(t, \tau) &= p_1(\tau) \sin \sigma(t) + q_1(\tau) \cos \sigma(t); \\ y_0(t, \tau) &= p_2(\tau) \sin \sigma(t) + q_2(\tau) \cos \sigma(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$  — функции медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ ;  $\varepsilon$  — малый безразмерный параметр.

Продифференцировав уравнения (3), запишем выражения для обобщенных скоростей и ускорений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \varepsilon \frac{dp_1(\tau)}{d\tau} \sin \sigma(t) + p_1(\tau) \omega(t) \cos \sigma(t) + \\ &+ \varepsilon \frac{dq_1(\tau)}{d\tau} \cos \sigma(t) - q_1(\tau) \omega(t) \sin \sigma(t) + \frac{\partial x_1(t, \tau)}{\partial t}; \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \varepsilon \frac{dp_2(\tau)}{d\tau} \sin \sigma(t) + p_2(\tau) \omega(t) \cos \sigma(t) + \\ &+ \varepsilon \frac{dq_2(\tau)}{d\tau} \cos \sigma(t) - q_2(\tau) \omega(t) \sin \sigma(t) + \frac{\partial y_1(t, \tau)}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= 2\varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} \omega(t) \cos \sigma(t) + p_1 \left[ \frac{d\omega(t)}{dt} \cos \sigma(t) - \omega^2(t) \sin \sigma(t) \right] - \\ &- 2\varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} \omega(t) \sin \sigma(t) - q_1 \left[ \frac{d\omega(t)}{dt} \sin \sigma(t) + \omega^2(t) \cos \sigma(t) \right] + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2\varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} \omega(t) \cos \sigma(t) + p_2 \left[ \frac{d\omega(t)}{dt} \cos \sigma(t) - \omega^2(t) \sin \sigma(t) \right] - \\ - 2\varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} \omega(t) \sin \sigma(t) - q_2 \left[ \frac{d\omega(t)}{dt} \sin \sigma(t) + \omega^2(t) \cos \sigma(t) \right] + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (1), получаем систему уравнений для определения функций  $x_1(t, \tau)$  и  $y_1(t, \tau)$ :

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 x_1 = -(c + h_c)x_1 - (n + h_s)y_1 - (\gamma + g_c) \frac{\partial x_1}{\partial t} - (v + g_s) \frac{\partial y_1}{\partial t} + \\ + A(t, \tau, x_1, y_1) + \left[ \left( 2\varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} + (\gamma + g_c)q_1 + (v + g_s)q_2 \right) \omega(t) - (c + h_c)p_1 - \right. \\ \left. - (n + h_s)p_2 - (\omega_0^2 - \omega^2)p_1 + q_1 \frac{d\omega}{dt} - u_1 - \xi k_1 \right] \sin \sigma(t) + \quad (4) \\ + \left[ - \left( 2\varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} + (\gamma + g_c)p_1 + (v + g_s)p_2 \right) \omega(t) - (c + h_c)q_1 - (n + h_s)q_2 - \right. \\ \left. - (\omega_0^2 - \omega^2)q_1 - p_1 \frac{d\omega}{dt} + u_2 + \xi k_2 \right] \cos \sigma(t);$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 y_1 = -(c - h_c)x_1 + (n - h_s)y_1 - (\gamma - g_c) \frac{\partial x_1}{\partial t} + (v - g_s) \frac{\partial y_1}{\partial t} + \\ + B(t, \tau, x_1, y_1) + \left[ \left( 2\varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} + (\gamma - g_c)q_2 - (v - g_s)q_1 \right) \omega(t) - (c - h_c)p_2 - \right. \\ \left. - (-n + h_s)p_1 - (\omega_0^2 - \omega^2)p_2 + q_2 \frac{d\omega}{dt} - u_3 - \xi k_3 \right] \sin \sigma(t) + \quad (5) \\ + \left[ - \left( 2\varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} + (\gamma - g_c)p_2 - (v - g_s)p_1 \right) \omega(t) - (c - h_c)q_2 - (-n + h_s)q_1 - \right. \\ \left. - (\omega_0^2 - \omega^2)q_2 - p_2 \frac{d\omega}{dt} + u_4 + \xi k_4 \right] \cos \sigma(t),$$

где  $A(t, \tau, x_1, y_1)$ ,  $B(t, \tau, x_1, y_1)$  — слагаемые модели, не содержащие в качестве множителей  $\cos \sigma(t)$  и  $\sin \sigma(t)$ ;  $\xi k_1$ ,  $\xi k_2$ ,  $\xi k_3$ ,  $\xi k_4$  — нелинейные слагаемые модели;  $k_1 = -p_1 E - q_2 K$ ;  $k_2 = q_1 E - p_2 K$ ;  $k_3 = -p_2 E + q_1 K$ ;  $k_4 = q_2 E + p_1 K$ ;  $E = 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4$ ;  $K = (p_2 q_1 - p_1 q_2)/2$ .

Для того чтобы избежать появления резонансных слагаемых в решении системы уравнений (4)–(5), приравняем к нулю коэффи-

циенты при  $\cos \sigma(t)$  и  $\sin \sigma(t)$ . В результате преобразований получим систему дифференциальных уравнений для медленно изменяющихся переменных  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} &= -(\gamma + g_c)q_1 - (v + g_s)q_2 + \\
 &+ \frac{c + h_c}{\omega(t)} p_1 + \frac{n + h_s}{\omega(t)} p_2 + \frac{\omega_0^2(t) - \omega^2(t)}{\omega(t)} p_1 - \frac{2}{\omega(t)} \frac{d\omega}{dt} q_1 + \frac{u_1}{\omega(t)} + \frac{\xi}{\omega(t)} k_1; \\
 2\varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} &= -(\gamma + g_c)p_1 - (v + g_s)p_2 - \\
 &- \frac{c + h_c}{\omega(t)} q_1 - \frac{n + h_s}{\omega(t)} q_2 - \frac{\omega_0^2(t) - \omega^2(t)}{\omega(t)} q_1 - \frac{2}{\omega(t)} \frac{d\omega}{dt} p_1 + \frac{u_2}{\omega(t)} + \frac{\xi}{\omega(t)} k_2; \\
 2\varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} &= -(\gamma - g_c)q_2 + (v - g_s)q_1 + \\
 &+ \frac{c - h_c}{\omega(t)} p_2 + \frac{-n + h_s}{\omega(t)} p_1 + \frac{\omega_0^2(t) - \omega^2(t)}{\omega(t)} p_2 - \frac{2}{\omega(t)} \frac{d\omega}{dt} q_2 + \frac{u_3}{\omega(t)} + \frac{\xi}{\omega(t)} k_3; \\
 2\varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} &= -(\gamma - g_c)p_2 + (v - g_s)p_1 - \\
 &- \frac{c - h_c}{\omega(t)} q_2 - \frac{-n + h_s}{\omega(t)} q_1 - \frac{\omega_0^2(t) - \omega^2(t)}{\omega(t)} q_2 - \frac{2}{\omega(t)} \frac{d\omega}{dt} p_2 + \frac{u_4}{\omega(t)} + \frac{\xi}{\omega(t)} k_4.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим линейный закон изменения частотной расстройки, позволяющий резонансной кривой прохождение через резонанс за время  $T$ :

$$\mu(t) = \omega_0(\Delta - 2\varepsilon\beta t), \tag{7}$$

где  $\Delta = \varepsilon\beta T \ll 1$ .

Подставляя выражение (7) в систему уравнений (6), получаем

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[ -(\gamma + g_c)q_1 - (v + g_s)q_2 + (\tilde{c} + \tilde{h}_c)p_1 + (\tilde{n} + \tilde{h}_s)p_2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\omega_0(\Delta - 2\varepsilon\beta t)p_1 - 2\beta q_1 + \tilde{u}_1 + \tilde{\xi}k_1 \right]; \\
 \dot{p}_1 &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[ -(\gamma + g_c)p_1 - (v + g_s)p_2 - (\tilde{c} + \tilde{h}_c)q_1 - (\tilde{n} + \tilde{h}_s)q_2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2\omega_0(\Delta - 2\varepsilon\beta t)q_1 - 2\beta p_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{\xi}k_2 \right];
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[ -(\gamma - g_c)q_2 + (v - g_s)q_1 + (\tilde{c} - \tilde{h}_c)p_2 - (\tilde{n} - \tilde{h}_s)p_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2\omega_0(\Delta - 2\varepsilon\beta t)p_2 - 2\beta q_2 + \tilde{u}_3 + \tilde{\xi}k_3 \right]; \\ \dot{p}_2 &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[ -(\gamma - g_c)p_2 + (v - g_s)p_1 - (\tilde{c} - \tilde{h}_c)q_2 + (\tilde{n} - \tilde{h}_s)q_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2\omega_0(\Delta - 2\varepsilon\beta t)q_2 - 2\beta p_2 + \tilde{u}_4 + \tilde{\xi}k_4 \right], \end{aligned}$$

где  $\tilde{c} = c/\omega_0$ ;  $\tilde{n} = n/\omega_0$ ;  $\tilde{h}_c = h_c/\omega_0$ ;  $\tilde{h}_s = h_s/\omega_0$ ;  $\tilde{\xi} = \xi/\omega_0$ ;  $\tilde{u}_i = u_i/\omega_0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

Далее для упрощения записей волнистая линия над буквами опускается.

Запишем систему нелинейных дифференциальных уравнений (8) с независимой переменной  $\tau$  в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{z}} = A(\tau) \cdot \mathbf{z} + \mathbf{u} + \mathbf{k}(\mathbf{z}), \quad (9)$$

где  $\mathbf{z}(\tau) = (q_1(\tau), p_1(\tau), q_2(\tau), p_2(\tau))^T$  — вектор измерений;

$$A(\tau) = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{pmatrix} -(\gamma + g_c) - 2\beta & c + h_c + K & -(v + g_s) & n + h_s \\ -(c + h_c) - K & -(\gamma + g_c) - 2\beta & -(n + h_s) & -(v + g_s) \\ v - g_s & -(n - h_s) & -(\gamma - g_c) - 2\beta & c - h_c + K \\ n - h_s & v - g_s & -(c - h_c) - K & -(\gamma - g_c) - 2\beta \end{pmatrix},$$

( $K = 2\omega_0(\Delta - 2\beta t)$ );  $\mathbf{u} = 0,5\varepsilon^{-1}(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  — вектор, характеризующий амплитуды сигналов, возбуждающих колебания резонатора;  $\mathbf{k}(\mathbf{z}) = 0,5\omega_0\xi(k_1(\mathbf{z}), k_2(\mathbf{z}), k_3(\mathbf{z}), k_4(\mathbf{z}))^T$  — вектор нелинейных слагаемых.

Полученная осредненная система уравнений (9) описывает в медленных переменных  $p_1(\tau), q_1(\tau), p_2(\tau), q_2(\tau)$  нелинейные колебания резонатора ВТГ при медленно изменяющейся частоте внешнего воздействия.

Отметим, что в электронном контуре гироскопа физически реализуется схема осреднения: измеряемые с помощью емкостной системы электродов высокочастотные функции времени  $x$  и  $y$  с помощью контуров обработки сигналов [12] представляются в виде (3). Таким образом, медленные переменные  $p_1(\tau), q_1(\tau), p_2(\tau), q_2(\tau)$  системы (9) являются измеряемыми.

**Идентификация параметров.** Введем вектор определяемых параметров

$$\boldsymbol{\alpha} = (\gamma, \nu, g_c, g_s, c, n, h_c, h_s, u_1, u_2, u_3, u_4, \xi)^T.$$

Проведем идентификацию параметров гироскопа  $\boldsymbol{\alpha}$  с применением метода наименьших квадратов и оптимального фильтра Калмана.

Запишем систему уравнений (8) в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{H}(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\alpha} + \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{z}, \tau), \quad (10)$$

где

$$\bar{H}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ -p_1 & -p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & k_2 \\ -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & k_3 \\ -p_2 & p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_4 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{z}, \tau) = \varepsilon^{-1} (\Delta - 2\beta\tau) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{z} - \frac{\beta}{2} \mathbf{z}.$$

Рассмотрим сначала оценку параметров  $\boldsymbol{\alpha}$  по методу наименьших квадратов. Отрезок времени наблюдений  $[0, T]$  разбиваем на  $N$  равных частей и на каждом  $i$ -м отрезке  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , вектор параметров  $\boldsymbol{\alpha}$  считаем постоянным. Интегрируем левую и правую части системы уравнений (10) по  $\tau$  на отрезке  $[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$ :

$$\mathbf{z}(\tau_{i+1}) - \mathbf{z}(\tau_{i-1}) = \bar{H}_i \cdot \boldsymbol{\alpha} + \bar{\mathbf{d}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (11)$$

где интегралы

$$\bar{H}_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} \bar{H}(\mathbf{z}(\tau)) d\tau, \quad \bar{\mathbf{d}}_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{z}(\tau), \tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

от элементов матриц и векторов вычисляются численно по элементарной формуле Симпсона.

Таким образом, систему уравнений (10), дискретизированную на отрезке  $[0, T]$  и представленную системами уравнений (11), можно записать в виде переопределенной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{H} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}, \quad (12)$$

где введены составные матрица  $\bar{H}$  и вектор  $\mathbf{b}$ :

$$\bar{H} = (\bar{H}_1^T, \bar{H}_2^T, \dots, \bar{H}_N^T)^T, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{b}_1^T, \mathbf{b}_2^T, \dots, \mathbf{b}_N^T)^T, \\ \mathbf{b}_i = \mathbf{z}(\tau_{i+1}) - \mathbf{z}(\tau_{i-1}) - \bar{\mathbf{d}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Оценку  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  вектора  $\boldsymbol{\alpha}$  находим, решая нормальную систему методом наименьших квадратов:

$$\bar{H}^T \bar{H} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{H}^T \mathbf{b}. \quad (13)$$

Для применения оптимальной фильтрации Калмана вводим вектор состояния

$$\mathbf{s} = (q_1, p_1, q_2, p_2, \gamma, \mathbf{v}, g_c, g_s, c, n, h_c, h_s, u_1, u_2, u_3, u_4, \xi)^T = (\mathbf{z}^T, \boldsymbol{\alpha}^T)^T$$

и дополняем динамическую систему уравнений (10) формирующими уравнениями, полагая, что идентифицируемые параметры постоянны и, следовательно, производные от них по времени равны нулю:

$$\dot{\mathbf{s}} = H(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} + \mathbf{d}(\mathbf{s}, \tau) + \mathbf{v}, \quad (14)$$

где матрица и вектор

$$H(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{H}(\mathbf{s}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{d}(\mathbf{s}, \tau) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{s}, \tau) \\ 0 \end{pmatrix}$$

составлены из блоков соответствующей размерности, а вектор  $\mathbf{v}$  представляет собой гауссовский случайный процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием, характеризующий погрешности на входе системы.

Наблюдение осуществляется над векторным сигналом  $\mathbf{y}$ , который можно представить в виде

$$\mathbf{y} = C\mathbf{s} + \mathbf{w}, \quad (15)$$

где  $C = (I0)$  — блочная матрица;  $I$  — единичная матрица четвертого порядка;  $\mathbf{w}$  — векторный гауссовский случайный процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием, характеризующий погрешности измерений медленно изменяющихся функций  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ .

Система уравнений (14) нелинейная, поэтому запишем ее в виде

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \mathbf{v}; \quad \mathbf{f}(\mathbf{s}) = H(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} + \mathbf{d}(\mathbf{s}, \tau) \quad (16)$$

и применим обобщенный фильтр Калмана [18].

Линеаризованная система уравнений примет вид

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}'(\hat{\mathbf{s}})\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{v}; \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}) - \mathbf{f}'(\hat{\mathbf{s}})\hat{\mathbf{s}}, \quad (17)$$

где  $\hat{\mathbf{s}}$  — полученная ранее оценка вектора  $\mathbf{s}$ ;  $\mathbf{f}'(\hat{\mathbf{s}})$  — матрица Якоби.

К линеаризованной системе уравнений (17), записанной в дискретной форме

$$\mathbf{s}_i = \Phi_i \mathbf{s}_{i-1} + \tilde{\mathbf{f}}_i + \mathbf{v}; \quad \tilde{\mathbf{f}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{s}_{i-1}) - \mathbf{f}'(\mathbf{s}_{i-1})\mathbf{s}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (18)$$

с переходной матрицей  $\Phi_i$ , и системе наблюдения, также записанной в дискретной форме

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{s}_i + \mathbf{w}, \quad i = 1, \dots, N,$$

применяем оптимальный фильтр Калмана с дискретным временем [19]. Для априорной информации  $\mathbf{s}_0 = (\mathbf{z}_0^\top, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0^\top)^\top$  берется оценка вектора параметров  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$ , полученная с помощью метода наименьших квадратов (13) при малом числе начальных измерений.

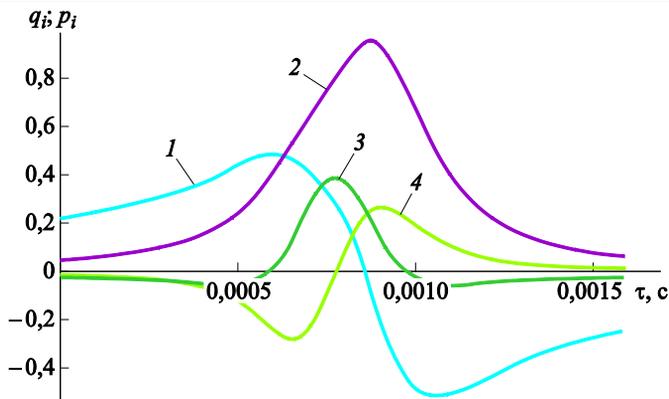
**Вычислительные эксперименты.** Приведем результаты некоторых из проведенных вычислительных экспериментов, выполненных в пакете Wolfram Mathematica. Задан вектор параметров

$$\boldsymbol{\alpha} = (8\pi, 2, 1, 3, 1, 5, 0, 0, 10, 12, 30, 0, 0, 0, 0, 3)^\top, \quad (19)$$

соответствующий реальным гироскопам с добротностью  $Q = 2500$  и основной резонансной частотой чувствительного элемента ВТГ  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Моделирование динамики резонатора ВТГ с заданными параметрами (19) проводили в медленных переменных с помощью уравнений (14).

На рисунке представлены зависимости функций  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$  от времени на отрезке  $T = 100 \text{ с}$  при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний (2) с начальной относительной частотной настройкой  $\Delta = 0,001$  и, как следствие, параметром  $\beta = 0,001\omega_0/T$ .

Моделирование съема информации (15) осуществлялось добавлением случайной погрешности  $\mathbf{w}$ , подчиняющейся нормальному закону распределения, и случайной погрешности  $\mathbf{v}$ , входящей в систему дифференциальных уравнений (14). Среднеквадратические отклонения  $\sigma_w = 0,001$ ,  $\sigma_v = 0,005$ . Число точек съема информации 100.



Зависимости  $q_i$  и  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , от времени  $\tau = \varepsilon t$  при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний:

1 —  $q_1(\tau)$ ; 2 —  $p_1(\tau)$ ; 3 —  $q_2(\tau)$ ; 4 —  $p_2(\tau)$

Для расчета относительной погрешности параметров, полученных с помощью методик определения параметров, используем евклидову норму вектора:  $r = \|\alpha - \hat{\alpha}\| / \|\alpha\|$ .

При идентификации параметров по методике (18), учитывающей нелинейность колебаний, получим

$$\hat{\alpha}_1 = (25,168, 1,995, 1,283, 1,488, -0,004, -0,011, 9,989, 12,004, 30,006, 0,006, -0,013, 0,002, 2,990,)^T, \quad r_1 = 0,001,$$

а при методике идентификации параметров, не учитывающей нелинейность (коэффициент нелинейности в данном случае отсутствует), —

$$\hat{\alpha}_2 = (25,310, 2,251, 1,629, 2,096, -1,257, -1,061, 10,414, 10,819, 30,111, 0,287, 0,117, 0,079,)^T, \quad r_2 = 0,051.$$

Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают значительное повышение точности определения параметров при использовании предложенной методики идентификации параметров, учитывающей нелинейность.

При проведении идентификации параметров по методу наименьших квадратов (13), обрабатывая сразу весь массив измерений, получаем

$$\hat{\alpha}_3 = (25,177, 1,998, 1,277, 1,491, -0,017, -0,021, 9,992, 12,003, 30,008, 0,007, -0,013, 0,001, 2,956,)^T, \quad r_3 = 0,002,$$

что показывает не худший результат, чем оценка  $\hat{\alpha}_1$ , полученная с помощью фильтра Калмана.

Применение фильтра Калмана позволяет определять параметры гироскопа по мере съема измерительной информации. Однако при обработке всего массива измерений установлена невысокая эффективность применения фильтра Калмана для идентификации параметров ВТГ: для вычислений он более трудоемкий по сравнению с методом наименьших квадратов и ввиду наличия шумов измерений в матрице фильтра не обеспечивает значительного уменьшения погрешности.

**Заключение.** Разработана методика определения параметров ВТГ с учетом нелинейности при медленно изменяющейся частоте вынужденных колебаний. Применение этой методики обеспечивает сокращение времени на уточнение параметров работающего гироскопа и позволяет автоматизировать процесс определения его параметров. Использование найденных при идентификации параметров и коэффициента нелинейности в аналитической и силовой компенсации позволит повысить точность гироскопа.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда  
фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00772-а,  
№ 16-08-01269-а).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. *Волновой твердотельный гироскоп*. Москва, Наука, 1985, 125 с.
- [2] Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ). *Изв. РАН. МТТ*, 1993, № 3, с. 15–26.
- [3] Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. *Изв. АН. МТТ*, 1997, № 6, с. 27–35.
- [4] Журавлев В.Ф. Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко. *Изв. РАН. МТТ*, 2000, № 5, с. 186–192.
- [5] Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф. О балансировке волнового твердотельного гироскопа. *Изв. РАН. МТТ*, 1998, № 4, с. 4–16.
- [6] Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. *Проектирование волнового твердотельного гироскопа*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997, 167 с.
- [7] Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А., Чуманкин Е.А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности. *Наука и образование*, 2013, № 6. DOI <http://dx.doi.org/10.7463/0613.0579179>
- [8] Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. Static Balancing of Metal Resonators of Cylindrical Resonator Gyroscopes. *Gyroscopy and Navigation*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 213–218.
- [9] Басараб М.А., Матвеев В.А., Лунин Б.С., Чуманкин Е.А. Алгоритмы и технологии поверхностной балансировки полусферического и цилиндрического волновых твердотельных гироскопов. *XXII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Сб. материалов конференции* [Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S.,

- Chumankin E.A. Algorithms and Technologies for Surface Balancing of Hemispherical and Cylindrical Resonator Gyroscopes. *22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. ICINS 2015 – Proceedings 22]. Санкт-Петербург, Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015, pp. 383–386.
- [10] Басараб М.А., Матвеев В.А. Алгоритм расчета параметров дебаланса резонатора волнового твердотельного гироскопа при произвольной форме колебаний. *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*, 2016, № 9, с. 9–15.
- [11] Жанруа А., Буве А., Ремиллье Ж. Волновой твердотельный гироскоп и его применение в морском приборостроении. *Гироскопия и навигация*, 2013, № 4, с. 24–34.
- [12] Меркурьев И.В., Подалков В.В. *Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов*. Москва, Физматлит, 2009, 228 с.
- [13] Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Экспериментальные методы определения параметров вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа. *Вестник МЭИ*, 2010, № 5, с. 13–19.
- [14] Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора. *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*, 2014, № 5, с. 18–23.
- [15] Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. *Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа*. Пат. № 2544308 Российская Федерация, 2015, бюл. № 14, с. 8.
- [16] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V. Nonlinear Effects in Dynamics of Cylindrical Resonator of Wave Solid-State Gyro with Electrostatic Control System. *Gyroscopy and Navigation*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 224–229.
- [17] Найфэ А.Х. *Методы возмущений*. Москва, Мир, 1976, 454 с.
- [18] Ллойд Э., Ледерман У. *Справочник по прикладной статистике*. Москва, Финансы и статистика, 1990, 528 с.
- [19] Браммер К., Зиффлинг Г. *Фильтр Калмана — Бьюси*. Москва, Наука, 1982, 257 с.

Статья поступила в редакцию 31.03.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Маслов Д.А. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа при медленно меняющейся частоте вынужденных колебаний. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 10. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-10-1695>

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XLI Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 января 2017 г.*

**Маслов Дмитрий Александрович** родился в 1993 г., окончил НИУ «МЭИ» в 2015 г. (магистр прикладной математики и информатики). Аспирант кафедры высшей математики НИУ «МЭИ». Автор семи научных работ по исследованию динамики волновых твердотельных и микромеханических гироскопов. Сфера научных интересов: математическое моделирование, теория колебаний и устойчивость движения, теоретическая механика, гироскопия. e-mail: dm\_93@live.ru, MaslovDmA@mpei.ru

## Identification of solid state wave gyroscope parameters at slowly varying forced oscillation frequency

© D.A. Maslov

National Research University "Moscow Power Engineering Institute",  
Moscow, 111250, Russia

Currently, the solid state wave gyroscope (SSWG) is one of the prospective transducers of the inertial data, as it shows high reliability and has small overall dimensions at relatively low cost. The navigation and traffic control systems for the objects of various applications designed on the base of SSWG have a wide range of usage. To increase the SSWG characteristics of precision is an up-to-date line of research. The problem of identifying the SSWG parameters is connected with increasing the SSWG precision and aimed at estimating the tolerance caused by both the resonator manufacturing imperfections and nonlinear nature of the oscillations. There is a technique which allows defining the nonlinearity factor along with the linear model parameters. It uses a time-consuming measure procedure which is carried out at stationary modes of constrained oscillations corresponding to various adjustable frequencies of the generator. The conduct of such measurements requires numerous frequency manipulations and waiting for the transition processes ending. This work suggests a technique for identifying the gyroscope parameters with consideration for nonlinearity at slowly varying frequency of the constrained oscillations. The identified parameters include the frequency difference, the versatility, the parameters of the external action onto the resonator and the nonlinearity factor. These parameters are needed for the quality control and technological advancement of gyroscope manufacturing as well as for its drift cancellation. The allowance for the nonlinear nature of the resonator oscillations enables testing at high oscillations amplitudes when the signal-to-noise ratio is fairly high, which helps to increase the accuracy of the parameters identification. In order to estimate the parameters of the obtained mathematical model for the resonator oscillations at slowly varying frequency of the constrained oscillations we use a Kalman optimum filtering algorithm. The developed technique will allow automating the parameters identification process at slowly varying frequency of the constrained oscillations and reducing the time for defining the parameters of the working gyroscope.

**Keywords:** solid state wave gyroscope, nonlinear oscillations, parameters identification, Kalman filter

### REFERENCES

- [1] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoy tverdotelnyy giroskop* [Solid state wave gyroscope]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 125 p.
- [2] Zhuravlev V.F. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 1993, no. 3, pp. 15–26.
- [3] Zhuravlev V.F. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 1997, no. 6, pp. 27–35.
- [4] Zhuravlev V.F. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2000, no. 5, pp. 186–192.
- [5] Zhbanov Yu.K., Zhuravlev V.F. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 1998, no. 4, pp. 4–16.

- [6] Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotelnogo giroskopa* [Designing the solid state wave gyroscope]. Moscow, BMSTU Publ., 1997, 167 p.
- [7] Matveev V.A., Lunin B.S., Basarab M.A., Chumankin E.A. *Nauka i obrazovanie — Science and Education*, 2013, no. 6. DOI <http://dx.doi.org/10.7463/0613.0579179>
- [8] Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. *Giroskopiya i navigatsiya — Gyroscopy and Navigation*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 213–218.
- [9] Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. Algorithms and technologies for surface balancing of hemispherical and cylindrical resonator gyroscopes. *Proceedings of the 22nd St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2015, pp. 383–386.
- [10] Basarab M.A., Matveev V.A. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika — Instruments and Systems: Monitoring, Control and Diagnostics*, 2016, no. 9, pp. 9–15.
- [11] Zhanrua A., Buve A., Remille Zh. *Giroskopiya i navigatsiya — Gyroscopy and Navigation*, 2013, no. 4, pp. 24–34.
- [12] Merkurev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotelnogo giroskopov* [Dynamics of micromechanical and solid state wave gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 228 p.
- [13] Gavrilenko A.B., Merkurev I.V., Podalkov V.V. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo institute — MPEI Vestnik*, 2010, no. 5, pp. 13–19.
- [14] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkurev I.V. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika — Instruments and Systems: Monitoring, Control and Diagnostics*, 2014, no. 5, pp. 18–23.
- [15] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkurev I.V. *Sposob opredeleniya parametrov volnovogo tverdotelnogo giroskopa* [The technique for identifying the parameters of the solid state wave gyroscope]. Patent RF, no. 2544308, 2015, no. 14, p. 8.
- [16] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V. *Giroskopiya i navigatsiya — Gyroscopy and Navigation*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 224–229.
- [17] Naife A.Kh. *Metody vozmushcheniy* [Perturbation methods]. Moscow, Mir Publ., 1976, 454 p. [in Russ.].
- [18] Lloyd E., Lederman U. *Spravochnik po prikladnoy statistike* [Applied statistics reference]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1990, 528 p. [in Russ.].
- [19] Brammer K., Ziffing G. *Filtr Kalmana — Byusi* [Kalman-Bucy filter]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 257 p. [in Russ.].

**Maslov D.A.** (b. 1993) graduated from National Research University “Moscow Power Engineering Institute” in 2015. Master of applied mathematics and information science, post-graduate student of the Department of Higher Mathematics, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”. Author of seven scientific works on studying the dynamics of micromechanical and solid state wave gyroscopes. Research interests include: mathematical modeling, oscillation theory and dynamic stability, theoretical mechanics and gyroscopy. e-mail: [dm\\_93@live.ru](mailto:dm_93@live.ru), [MaslovDmA@mpei.ru](mailto:MaslovDmA@mpei.ru)