

К теории дробления заряженной капли в потоке

© М.Н. Сергеев

РГАТУ им. П.А. Соловьева, Рыбинск, 152934, Россия

Рассмотрены условия равновесия заряженной капли в потоке. Если жидкость, из которой состоит капля, — проводник, то заряд распространится по поверхности капли и силы кулоновского отталкивания будут направлены против силы поверхностного натяжения жидкости. Это является физической причиной облегчения распада капли. При определении устойчивости капли используется метод, согласно которому считается, что капля находится в равновесии, если давление внутри нее в точках на большой и малой полуосях эллипса равно. При этом полагается, что капля имеет форму сфероида. Из условия равновесия определено число Вебера, при некотором критическом значении которого капля становится неустойчивой и происходит ее распад. Влияние заряда капли математически выражено через параметр, равный отношению давлений, обусловленных силами электростатического отталкивания и поверхностного натяжения. Согласно результатам расчетов, наличие заряда на поверхности капли влияет двояким образом. С одной стороны, уменьшается предельное аэродинамическое воздействие, приводящее к дроблению капли, а с другой стороны, равновесное значение отношения полуосей эллипсоида увеличивается и становится труднодостижимым, что также способствует дроблению капли.

Ключевые слова: условие равновесия, дробление капли, эллипсоид, электрический заряд, поверхностное натяжение

Распыливание жидкости, используемое во многих технических устройствах, является важнейшим звеном в работе тепловых двигателей, работающих на жидком топливе. Дробление струи на капли происходит в форсунках. Далее капли могут испытывать вторичное дробление при аэродинамическом взаимодействии с окружающим их газовым потоком [1, 2]. Облегчить процесс вторичного дробления можно, зарядив каплю электрическим зарядом. Если жидкость, из которой состоит капля, является проводником, то заряд распространится по поверхности капли и силы кулоновского отталкивания будут направлены против силы поверхностного натяжения. Это обстоятельство и будет физической причиной облегчения распада капли. Неустойчивость заряженной капли без взаимодействия с окружающим потоком рассмотрена в работах [3–7]. В работе [8] определены условия дробления электрически заряженной сферической капли в потоке. При более строгом подходе требуется учитывать деформацию капли, так как она влияет на аэродинамику обтекания и на характер распределения заряда по поверхности капли, а следовательно, и на характер поверхностных сил.

Цель настоящей работы — определить условия устойчивости капли в потоке, для чего использован метод, предложенный в работе

[9]. Суть этого метода заключается в том, что капля считается находящейся в равновесии, если давление внутри нее в точках A и B равно. При этом полагают, что капля имеет форму сфероида (сплюснутый эллипсоид), а точки A и B (рис. 1) находятся в значительно различающихся геометрических и аэродинамических условиях.

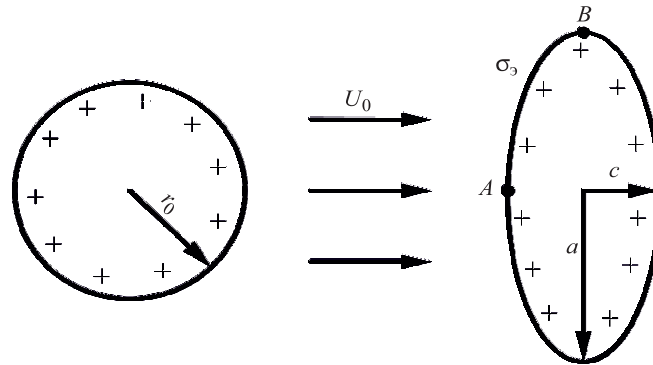


Рис. 1. Схема деформации заряженной капли

Из условия равновесия определено число Вебера:

$$We = \frac{\rho U_0^2 d_0}{\sigma}, \quad (1)$$

где ρ — плотность газа; U_0 — скорость капли относительно потока; $d_0 = 2r_0$ — диаметр исходной капли; σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

При некотором критическом значении числа We , которое определяется по характеру зависимости We от соотношения между полуосями a и c эллипсоида (см. рис. 1), капля становится неустойчивой и происходит ее распад. Определение числа We и зависимости его от заряда капли составляет цель данной работы.

Запишем условия равновесия капли при наличии у нее электрического заряда:

$$p_n^A + p_\sigma^A + p_3^A = p_n^B + p_\sigma^B + p_3^B. \quad (2)$$

В точках A и B сфероида наружное давление p_n^A и p_n^B и давление, обусловленное поверхностным натяжением жидкости p_σ^A и p_σ^B , определяют из допущения об обтекании эллипсоида идеальной жидкостью по формулам, приведенным в работе [9], и уравнению Лапласа для поверхностного натяжения:

$$p_n^A = \frac{\rho U_0^2}{2}; \quad (3)$$

$$p_n^B = \left[1 - \left(\frac{e^3}{\sqrt{1-e^2} \arcsin e - e(1-e^2)} \right)^2 \right] \frac{\rho U_0^2}{2}; \quad (4)$$

$$p_\sigma^A = \frac{2\sigma}{r_0 k \sqrt[3]{k}}; \quad (5)$$

$$p_\sigma^B = \frac{\sigma}{r_0} \left(k \sqrt[3]{k^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right), \quad (6)$$

где эксцентриситет эллипсоида e и отношение полуосей k имеют вид

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}; \quad (7)$$

$$k = \frac{a}{c}. \quad (8)$$

Для определения давления, обусловленного действием сил электрического отталкивания зарядов на поверхности капли, используем формулы для распределения поверхностной плотности заряда на проводящем эллипсоиде (в системе СГСЭ) [10]:

$$\sigma_3 = \frac{q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}. \quad (9)$$

Для рассматриваемого сфероида при $a = b > c$ получим следующие выражения:

в точке A при $x = y = 0, z = c$

$$\sigma_3^A = \frac{q}{4\pi r_0^2} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}; \quad (10)$$

в точке B при $x = z = 0, y = a$

$$\sigma_3^B = \frac{q}{4\pi r_0^2} \sqrt[3]{k}. \quad (11)$$

Давление со стороны электрического поля напряженностью E на элементарную заряженную площадку

$$p_3 = \frac{dF}{dS} = \frac{Edq}{dS} = E\sigma_3; \quad (12)$$

напряженность электрического поля

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}; \quad (13)$$

поверхностная плотность заряда [3]

$$\sigma_s = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \quad (14)$$

Следовательно, $E = 4\pi\sigma_s$, и выражение для электростатического давления примет вид

$$p_s = -4\pi\sigma_s^2. \quad (15)$$

Знак «минус» в формуле (15) обусловлен тем, что электростатическое давление направлено в сторону, противоположную внешнему давлению и давлению, связанному с поверхностным натяжением.

Подставив выражения (10) и (11) в формулу (15) и затем в равенство (2) с учетом формул (3)–(6) получим

$$We = \frac{4}{\eta^2} (\varphi - 2S_e\chi); \quad (16)$$

$$\varphi = k^{5/3} + k^{-1/3} - 2k^{-4/3}; \quad (17)$$

$$\chi = k^{2/3} - k^{-4/3}; \quad (18)$$

$$\eta = \frac{e^3}{\sqrt{1-e^2} \arcsin e - e(1-e^2)}; \quad (19)$$

$$S_e = \frac{q^2}{\pi\sigma d^3}. \quad (20)$$

Безразмерное число S_e характеризует отношение электростатического давления и давления, обусловленного поверхностным натяжением жидкости. Действительно, электростатическое давление для сферы

$$p_s = \frac{dF}{dS} = \frac{q^2}{4\pi r_0^4}. \quad (21)$$

Соответственно давление поверхностного натяжения по формуле Лапласа имеет вид

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{r_0^2}, \quad (22)$$

откуда получим

$$\frac{p_3}{p_\sigma} = \frac{q^2}{8\pi\sigma r_0^3} = S_e. \quad (23)$$

Из выражения (23) следует, что при $S_e > 1$ равновесное состояние сферической капли отсутствует.

Число S_e также связано с отношением энергии электрического поля капли и энергии поверхностного натяжения. Для энергии электрического поля капли имеем

$$E_3 = \frac{q^2}{r_0}. \quad (24)$$

Энергия поверхностного натяжения соответственно имеет вид

$$E_\sigma = 4\pi r_0^2 \sigma, \quad (25)$$

откуда

$$\frac{E_3}{E_\sigma} = \frac{q^2}{4\pi\sigma r_0^3} = 2S_e. \quad (26)$$

Уравнения (16)–(20) позволяют рассчитать искомую зависимость $We = We(S_e, k)$. Результаты соответствующих расчетов приведены на рис. 2.

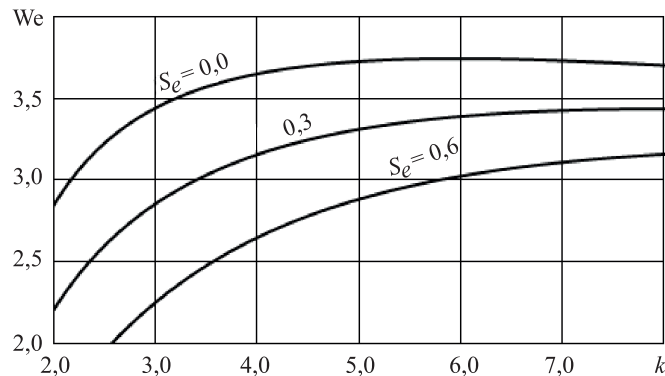


Рис. 2. График зависимости $We = We(S_e, k)$

Если при движении в потоке капля, постепенно деформируясь, достигает значения $k = k_{кр}$ и при этом $We > We_{кр}$, то равновесное состояние становится недостижимым и капля распадается. Как видно

на рис. 2, при $S_e = 0$, т. е. при отсутствии заряда, $We = 3,75$ и $k = 6$, что находится в полном соответствии с данными работы [9]. При увеличении S_e предельное значение числа $We_{кр}$ уменьшается.

Для определения зависимости $We_{кр} = We_{кр}(k_{кр})$ воспользуемся условием экстремума

$$\frac{dWe}{dk} = 0. \quad (27)$$

Подставив уравнение (16) в соотношение (27), получим следующее уравнение:

$$\varphi^* - 2S_e\chi^* + \frac{2C(\varphi - 2S_e\chi)}{(ke)^3} = 0, \quad (28)$$

где введены обозначения

$$\varphi^* = \frac{5}{3}k^{2/3} - \frac{1}{3}k^{-4/3} + \frac{8}{3}k^{-7/3}; \quad (29)$$

$$\chi^* = \frac{2}{3}k^{-1/3} + \frac{4}{3}k^{-7/3}; \quad (30)$$

$$C = \eta(3e - k \arcsin e) - 3e. \quad (31)$$

Решение уравнения (28) относительно $k = k_{кр}$ и соответствующее значения $We_{кр}$ представлены на рис. 3. Видно, что при изменении значения S_e от 0 до 1 критическое значение We изменяется от 3,75 до 2,96, соответствующее изменение соотношения между осями эллипсоида более значительное: от 5,97 до 13,55. Таким образом, наличие заряда на поверхности капли влияет двояким образом.

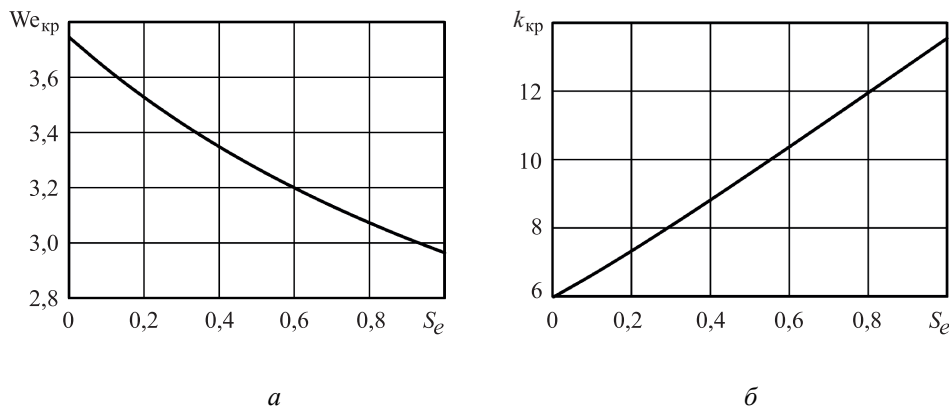


Рис. 3. Зависимость критических параметров $We_{кр}$ (а) и $k_{кр}$ (б) от числа S_e

С одной стороны, уменьшается предельное аэродинамическое воздействие, приводящее к дроблению капли, с другой — критическое равновесное значение отношения полуосей эллипсоида увеличивается и становится труднодостижимым, что также способствует дроблению. Это обусловлено тем, что при больших значениях k имеется значительная колебательная неустойчивость капли.

Смещение восходящей ветви кривой $We = We(S_e, k)$ вправо связано с особенностями распределения зарядов по поверхности капли и соответственно электростатического давления. Действительно, для точек A и B (см. рис. 1) из выражений (10), (11) и (15) следует, что

$$\sigma_3^A \sim \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}; \quad \left(\frac{p_3}{p_\sigma} \right)_A = S_e; \quad (32)$$

$$\sigma_3^B \sim \sqrt[3]{k}; \quad \left(\frac{p_3}{p_\sigma} \right)_B = \frac{k}{k+1} S_e. \quad (33)$$

Из анализа выражений (32) и (33) следует, что при деформации капли концентрация электрического заряда в точке B больше, чем в точке A , за счет увеличения кривизны поверхности, но относительное влияние поверхностного натяжения при этом, наоборот, меньше, и при больших k относительное изменение давления зависит практически только от S_e . Другими словами, изменение давления поверхностного натяжения пропорционально значению S_e .

Определим, какие значения S_e могут быть в практических задачах. Вычислим заряд капли при $S_e = 1$, при этом полагаем, что жидкостью является вода и, следовательно, $\sigma = 73$ дин/см, $d = 0,26$ см, тогда

$$q = \sqrt{\pi\sigma d^3}. \quad (34)$$

Соответствующее вычисление дает достаточно большое значение для заряда $q = 2 \text{ СГСЭ} = 0,67 \text{ нКл}$. В экспериментах для капель с таким диаметром получается $q = 0,3 \text{ нКл}$, и капля в этом случае может испытывать коронный разряд [11]. Это означает, что для безразрядной интенсификации дробления капли в потоке существует ограничение на ее заряд и размер.

Действительно, критическое значение напряженности для капли, при котором возникает разряд,

$$E_{\text{кр}} = \frac{4q}{d_{\text{кр}}^2}. \quad (35)$$

Подставив значение заряда из формулы (35) в выражение (34), с учетом соотношения (20) получим

$$d_{\text{кр}} = \frac{16\pi\sigma}{E_{\text{кр}}^2} S_e. \quad (36)$$

Принимая для воздуха $E_{\text{кр}} = 100$ СГСЭ, получаем следующие оценочные значения критических параметров при $S_e = 1$: $d_{\text{кр}} = 0,36$ см, $q_{\text{кр}} = 3,24$ СГСЭ, которые значительно превышают имеющиеся в инженерной практике.

Таким образом, при расчете дробления заряженной капли в потоке необходимо учитывать, что наличие заряда приводит к уменьшению критического значения числа Вебера и оказывает существенное влияние на эксцентриситет капли. Количественные зависимости, полученные в данной работе, можно использовать при расчете качества распыла жидкостей и процессов смесеобразования в различных технических устройствах.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дитякин Ю.Ф., Клячко Л.А., Новиков Б.В., Ягодкин В.И. *Распыливание жидкостей*. Москва, Машиностроение, 1977, 208 с.
- [2] Пажы Д.Г., Галустов В.С. *Основы техники распыливания жидкостей*. Москва, Химия, 1984, 256 с.
- [3] Hendrics C.D., Schneider J.M. Stability of Conducting Droplet under the Influence of Surface Tension and Electrostatic Forces. *American Journal of Physics*, 1963, vol. 1 (6), pp. 450–453.
- [4] Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли. *Журнал технической физики*, 1986, т. 56 (7), с. 1272–1278.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Корниенко Д.О. О некоторых закономерностях реализации сфероидальных осцилляций и электростатической неустойчивости заряженной капли. *Журнал технической физики*, 2010, т. 80 (11), с. 11–20.
- [6] Cheng K.J., Chaddock J.B. Deformation and Stability of Drops and Bubbles in an Electric Field. *Physics Letters A*, 1984, 106 (1–2), pp. 51–54.
- [7] Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критерий неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе. *Электронная обработка материалов*, 2015, т. 51 (3), с. 44–50.
- [8] Ефимов Н.А., Звонов В.А., Ефимова Л.Я. Исследование влияния характера прикладываемого напряжения на истечение бензина. *Электронная обработка материалов*, 1979, № 1, с. 45–47.
- [9] Клячко Л.А. К теории дробления капли потоком газа. *Инженерный журнал*, 1963, т. 3, вып. 3, с. 554–557.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 8: Электродинамика сплошных сред*. Москва, Наука, 1992, 664 с.
- [11] Шишкин Н.С. О возникновении коронных явлений в конвективных облаках. *Труды Главной геофизической обсерватории им. А.И. Воейкова*, 1983, вып. 469, с. 3–6.

Статья поступила в редакцию 15.02.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сергеев М.Н. К теории дробления заряженной капли в потоке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1751>

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FAPM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 октября 2017 г.

Сергеев Михаил Николаевич окончил физический факультет ЯрГУ в 1991 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Общая и техническая физика» РГАТУ им. П.А. Соловьева. Область научных интересов: газодинамика закрученных потоков. e-mail: mihail_sergeev@mail.ru

On the theory of charged droplet fragmentation in the stream

© M.N. Sergeev

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University,
Rybinsk, 152934, Russia

The article considers conditions for the equilibrium of a charged drop in a stream. If the liquid constituting the drop is a conductor, the charge will spread over the surface of the drop and the forces of the Coulomb repulsion will be directed against the force of surface tension. This is the physical reason for facilitating the drop disintegration. In determining the stability of a drop, a method is used, the essence of which is that the drop is considered to be in equilibrium if the pressure inside it at the points on the large and small semi-axes of the ellipse are equal. It is assumed that the drop has the shape of a spheroid. The Weber number is determined from the equilibrium condition. At some critical value of the Weber number the drop becomes unstable and disintegrates. The effect of the drop charge is mathematically expressed through a parameter equal to the ratio of the pressures caused by the forces of electrostatic repulsion and surface tension. According to the calculation results, the presence of charge on the surface of the drop is manifested in two ways. On the one hand, the limiting aerodynamic action, leading to drop fragmentation decreases; on the other hand, the equilibrium value of the ellipsoid semi-axes ratio increases and becomes difficult to achieve, which also contributes to drop fragmentation.

Keywords: equilibrium condition, drop fragmentation, ellipsoid, electric charge, surface tension

REFERENCES

- [1] Dityakin Yu.F., Klyachko L.A., Novikov B.V., Yagodkin V.I. *Raspylivanie zhidkostey* [Atomization of liquids]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 208 p.
- [2] Pazhi D.G., Galustov V.S. *Osnovy tekhniki raspylivaniya zhidkostey* [Fundamentals of liquid atomization techniques]. Moscow, Khimiya Publ., 1984, 256 p.
- [3] Hendrics C.D., Schneider J.M. *American Journal of Physics*, 1963, vol. 1, no. 6, pp. 450–453.
- [4] Grigoriev A.I. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1986, vol. 56, no. 7, pp. 1272–1278.
- [5] Shiryaeva S.O., Grigoryev A.I., Kornienko D.O. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 2010, vol. 80, no. 11, pp. 11–20.
- [6] Cheng K.J., Chaddock J.B. *Physics Letters A*, 1984, vol. 106, no.1-2, pp. 51–54.
- [7] Grigoriev A.I., Shiryaeva S.O., *Elektronnaya obrabotka materialov — Surface Engineering and Applied Electrochemistry*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 44–50.
- [8] Efimov N.A., Zvonov V.A., Efimova L.Y. *Elektronnaya obrabotka materialov — Surface Engineering and Applied Electrochemistry*, 1979, no. 1, pp. 45–47.
- [9] Klyachko L.A. *Engenerno-fizicheskiy zhurnal — Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 554–557.
- [10] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 8: Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical physics. Vol. 8: Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1992, 664 p.
- [11] Shishkin N. C. O vznikenovonii koronnykh yavleniy v konvektivnykh oblakakh [On the origin of corona phenomena in convective clouds]. In: *Trudy Glavnoy*

geofizicheskoy observatorii im. A.I. Voeikova [Proceedings of Voeikov Main Geophysical Observatory]. Leningrad, 1983, vol. 469, pp. 3–6.

Sergeev M.N. graduated from the Physics Faculty of Yaroslavl State University in 1991. Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of General and Applied Physics, P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University. Research interests: gas dynamics of swirling flows. e-mail: mihail_sergeev@mail.ru