

Экспериментальное и теоретическое исследования колебаний твердого тела со слоистой жидкостью

© Вин Ко Ко, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача о малых движениях жидкостей и движении твердого тела, имеющего круговую цилиндрическую полость, заполненную тремя несжимаемыми идеальными жидкостями. При предположении безвихревого движения жидкостей сформулированы краевые задачи и получены решения для потенциалов смещений частиц жидкостей. С помощью уравнений Лагранжа 2-го рода получены уравнения движения гидромеханической системы. Показано отличие движения твердого тела, имеющего полость с жидкостями, от случая движения, рассмотренного Н.Е. Жуковским. Приведены задачи о собственных колебаниях жидкостей в неподвижном баке и движении твердого тела с жидкостями, формулы, определяющие собственные частоты и формы колебаний, а также результаты экспериментального исследования движения твердого тела и жидкостей.

Ключевые слова: *твердое тело, жидкость, собственные частоты, формы колебаний*

Введение. В настоящее время задача о движении твердого тела, имеющего полость, заполненную жидкостью, является классической задачей механики. Впервые подобная задача была рассмотрена Н.Е. Жуковским и опубликована в работе [1]. Для новых достижений в ракетно-космической технике, криогенной промышленности и газовой индустрии требуются исследования более общей задачи о движении тел, содержащих сложные жидкие среды. Одной из них является задача о движении твердого тела, имеющего полость, заполненную слоистой жидкостью. Колебаниям жидкостей, заполняющих частично полость подвижного и неподвижного твердого тела, посвящено достаточно большое число работ [2–15].

Постановка задачи. Пусть круговой цилиндр радиусом r_0 полностью заполнен тремя несжимаемыми идеальными жидкостями, имеющими плотности ρ_0, ρ_1, ρ_2 , ($\rho_0 < \rho_1 < \rho_2$) (рис. 1). Цилиндр закреплен на подвижной платформе общей массой M , способной совершать поступательное движение по горизонтальному гладкому основанию. Предположив, что жидкости, находящиеся в цилиндре, совершают малые смещения, определим основные характеристики движения жидкостей в круговом цилиндре.

Для составления уравнения движения рассматриваемой механической системы воспользуемся уравнениями движения Лагранжа 2-го рода.

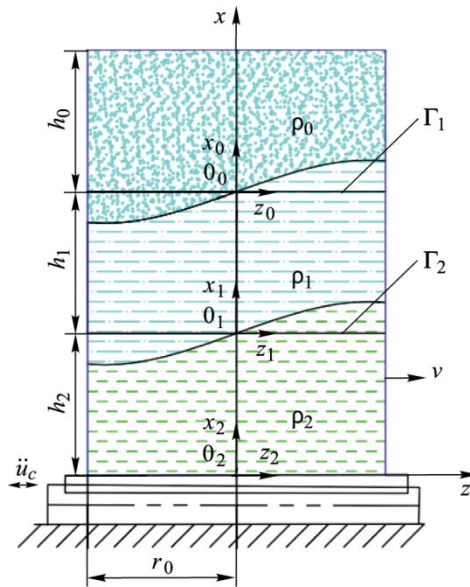


Рис. 1. Цилиндрический сосуд со слоистой жидкостью:
 h_0, h_1, h_2 — высоты слоев жидкостей; Γ_1, Γ_2 — поверхности разделов

Кинетическая энергия этой системы имеет вид

$$T_i = \frac{1}{2} M \dot{u}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \rho_i \iiint_{V_i} (\nabla \Phi_i)^2 dV_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (1)$$

где V_i, Φ_i — объемы и потенциалы абсолютных скоростей жидкостей.

При малых скоростях движения жидкостей потенциалы скоростей могут быть выражены через потенциалы смещения χ_i частиц жидкостей:

$$\Phi_i = \frac{\partial \chi_i(x_i, y_i, z_i, t)}{\partial t}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2)$$

Потенциалы смещения являются решениями краевых задач, удовлетворяющих уравнениям Лапласа и граничным условиям

$$\Delta \chi_i = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3)$$

К граничным условиям относятся:

- условия непротекания на смачиваемых поверхностях

$$\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu_i} \right|_{S_i} = u_c \sin \eta; \quad \left. \frac{\partial \chi_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=h_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad (4)$$

где ν_i — внешняя нормаль к смачиваемой поверхности S_i ($i = 0, 1, 2$);

- кинематические условия на поверхностях разделов

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial v_0} = \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1}, \text{ на } \Gamma_1; \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1} = \frac{\partial \chi_2}{\partial v_2}, \text{ на } \Gamma_2; \quad (5)$$

- динамические условия на поверхностях разделов

$$\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2} - \rho_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right) = (\rho_1 - \rho_0) g \frac{\partial \chi_0}{\partial v_0}, \text{ на } \Gamma_1; \quad (6)$$

$$\left(\rho_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \right) = (\rho_2 - \rho_1) g \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1}, \text{ на } \Gamma_2. \quad (7)$$

В результате решения краевых задач (3)–(7) в цилиндрических системах координат x_i, r, η ($i = 0, 1, 2$) потенциалы смещений запишем в следующем виде:

$$\chi_0 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ u(t) - \operatorname{th} k_n h_1 \frac{\operatorname{ch} k_n (x_0 - h_0)}{\operatorname{sh} k_n h_0} \sigma_{1n}(t) \right\}; \quad (8)$$

$$\chi_1 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \begin{array}{l} u(t) + \operatorname{th} k_n h_1 \frac{\operatorname{ch} k_n x_1 \sigma_{1n}(t)}{\operatorname{sh} k_n h_1} - \\ - \frac{\operatorname{ch} k_n (x_1 - h_1) \sigma_{2n}(t)}{\operatorname{ch} k_n h_1} \end{array} \right\}; \quad (9)$$

$$\chi_2 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ u(t) + \operatorname{th} k_n h_1 \frac{\operatorname{ch} k_n x_2 \sigma_{2n}(t)}{\operatorname{sh} k_n h_2} \right\}. \quad (10)$$

Потенциальную энергию для рассматриваемого случая определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Sigma} = & \frac{1}{2} g (\rho_1 - \rho_0) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right)^2 r \sin \eta dr + \\ & + \frac{1}{2} g (\rho_2 - \rho_1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right)^2 r \sin \eta dr. \end{aligned} \quad (11)$$

Поставив решения (8)–(10) для потенциалов смещений χ_i в формулы (1) и (11), получим окончательные выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2} M^* \dot{u}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (m'_{1n} - m'_{0n}) \dot{u}_c \dot{\sigma}_{1n} \} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (m'_{2n} - m'_{1n}) \dot{u}_c \dot{\sigma}_{2n} \} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) \dot{\sigma}_{1n}^2 \} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) \dot{\sigma}_{2n}^2 \}; \quad (12)$$

$$\Pi_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2 \sigma_{1n}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2 \sigma_{2n}^2. \quad (13)$$

В выражениях (12), (13) σ_{1n}, σ_{2n} — обобщенные координаты волновых движений поверхностей разделов жидкостей; $m_0 = \pi r_0^2 \rho_0 h_0$, $m_1 = \pi r_0^2 \rho_1 h_1$, $m_2 = \pi r_0^2 \rho_2 h_2$ — массы каждой жидкости; $m'_{0n} = \rho_0 V_n$, $m'_{1n} = \rho_1 V_n$, $m'_{2n} = \rho_2 V_n$ — массы колеблющихся жидкостей; $M^* = m_0 + m_1 + m_2 + M$ — суммарная масса всей гидромеханической системы; $V_n = \frac{2\pi r_0^3}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)} \text{th} k_n h_1$; $\overline{f_{0n}} = \text{th} k_n h_1 \text{cth} k_n h_0$; $\overline{f_{1n}} = \text{th} k_n h_1 \text{cth} k_n h_2$; $\omega_n^2 = g k_n \text{th} k_n h_1$; $k_n = \frac{\xi_n}{r_0}$, ξ_n — n -й корень уравнения $dJ_1(\xi)/d(\xi) = 0$.

Вывод уравнений движения. Используя уравнения Лагранжа 2-го рода, получаем систему уравнений движения в виде

$$M^* \ddot{u}_c + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{\sigma}_{2n} = 0; \quad (14)$$

$$\ddot{\sigma}_{1n} + \frac{(m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2 \sigma_{1n}}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{2n}}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) \text{ch} k_n h_1} + \frac{(m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{u}_c}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots; \quad (15)$$

$$\ddot{\sigma}_{2n} + \frac{(m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2 \sigma_{2n}}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{1n}}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) \text{ch} k_n h_1} + \frac{(m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{u}_c}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})} = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Для удобства проведения дальнейшего исследования введем новые обозначения: $m_{1n}^* = (m'_{1n} - m'_{0n})$; $m_{2n}^* = (m'_{2n} - m'_{1n})$; $\alpha_{1n} = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})$; $\alpha_{2n} = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})$; $a_{12n} = \frac{m'_{1n}}{\alpha_{1n} \text{ch} k_n h_1}$; $a_{21n} = \frac{m'_{1n}}{\alpha_{2n} \text{ch} k_n h_1}$; $b_{1n} = \frac{m_{1n}^*}{\alpha_{1n}}$; $b_{2n} = \frac{m_{2n}^*}{\alpha_{2n}}$; $\beta_{1n}^2 = b_{1n} \omega_n^2$; $\beta_{2n}^2 = b_{2n} \omega_n^2$.

Пусть бак, полностью заполненный жидкостями и закрепленный на подвижной пластине, может перемещаться поступательно только в горизонтальной плоскости. Примем, что на пластину действует в горизонтальной плоскости внешняя сила $F_u = F_0 \sin pt$, линия действия которой проходит через плоскость симметрии бака. Учитывая только первый тон колебаний жидкости ($n = 1$), определим амплитуду колебаний внешней силы F_0 , если подвижная пластина совершает движение с ускорением $\ddot{u}_c = a_0 \sin pt$, где a_0 — амплитудное значение ускорения.

Уравнения движения пластины с жидкостью при $n = 1$ будут иметь вид

$$M^* \ddot{u}_c + m_1^* \ddot{\sigma}_1 + m_2^* \ddot{\sigma}_2 = F_0 \sin pt; \quad (17)$$

$$\ddot{\sigma}_1 + \beta_1^2 \sigma_1 - a_{12} \ddot{\sigma}_2 + b_1 \ddot{u}_c = 0; \quad (18)$$

$$\ddot{\sigma}_2 + \beta_2^2 \sigma_2 - a_{21} \ddot{\sigma}_1 + b_2 \ddot{u}_c = 0. \quad (19)$$

Рассматривая вынужденные колебания жидкости, примем, что обобщенные координаты $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ изменяются по закону $\sigma_1 = \sigma_1^0 \sin pt$, $\sigma_2 = \sigma_2^0 \sin pt$ и $u_c = u_c^0 \sin pt$. Тогда запишем уравнения (17)–(19) в виде

$$-p^2 (M^* u_c^0 + m_1^* \sigma_1^0 + m_2^* \sigma_2^0) = F_0; \quad (20)$$

$$(-p^2 + \beta_1^2) \sigma_1^0 - a_{12} p^2 \sigma_2^0 = b_1 p^2 u_c^0; \quad (21)$$

$$-a_{21} p^2 \sigma_1^0 + (-p^2 + \beta_2^2) \sigma_2^0 = b_2 p^2 u_c^0. \quad (22)$$

Затем из уравнений (21) и (22) определим значения σ_1^0 и σ_2^0 :

$$\sigma_1^0 = \frac{b_1(-p^2 + \beta_2^2) + b_2 p^2 a_{12}}{(\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} p^2 u_c^0; \quad \sigma_2^0 = \frac{b_2(-p^2 + \beta_1^2) + b_1 p^2 a_{21}}{(\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} p^2 u_c^0. \quad (23)$$

В соотношениях (23) Ω_1 , Ω_2 — собственные частоты колебаний трех жидкостей в неподвижном баке,

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad (24)$$

$$a = (1 - a_{21} a_{12}); \quad b = -(\beta_1^2 + \beta_2^2); \quad c = (\beta_1^2 \beta_2^2). \quad (25)$$

Подставим полученные выражения (24) в уравнение (20). В результате уравнения движения твердого тела преобразуются к виду

$$F_0 = a_0 M_{\text{пр}}, \quad (26)$$

где $M_{\text{пр}}$ — масса преобразованного твердого тела,

$$M_{\text{пр}} = M^* \left[1 + \frac{m_1^* \left[b_1 (-p^2 + \beta_2^2) + b_2 p^2 a_{12} \right] p^2}{M^* (\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} + \frac{m_2^* \left[b_2 (-p^2 + \beta_1^2) + b_1 p^2 a_{21} \right] p^2}{M^* (\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} \right]. \quad (27)$$

Результаты численных расчетов. При исследовании движения твердого тела с полостью, заполненной однородной капельной жидкостью, установлено, что масса преобразованного твердого тела равна сумме масс твердого тела и затвердевшей жидкости [1]. В рассматриваемом случае в соответствии с формулой (27) при движении твердого тела со слоистой жидкостью масса преобразованного твердого тела зависит от частоты колебаний:

$$f(\bar{p}) = M_{\text{пр}}/M^*.$$

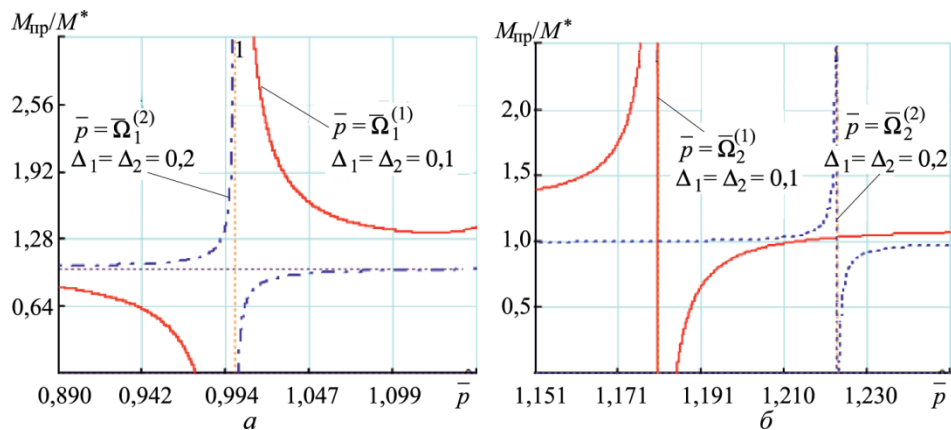


Рис. 2. Зависимость безразмерной массы преобразованного твердого тела $M_{\text{пр}}/M^*$ от безразмерной частоты колебаний при $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,1$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,2$ ($n = 1$) для первых $\bar{\Omega}_1^{(1)}, \bar{\Omega}_1^{(2)}$ (а) и вторых $\bar{\Omega}_2^{(1)}, \bar{\Omega}_2^{(2)}$ (б) главных частот

График $f(\bar{p}) = M_{\text{пр}}/M^*$ представлен на рис. 2; при построении графика приняты следующие обозначения:

$$\bar{p}^2 = \frac{p^2}{\Omega_1^2}; \quad \bar{\Omega}_2 = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}; \quad \bar{\beta}_1^2 = \frac{\beta_1^2}{\Omega_1^2}; \quad \bar{\beta}_2^2 = \frac{\beta_2^2}{\Omega_1^2}; \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{r_0}; \quad (28)$$

$$\Delta_1 = (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0); \quad \Delta_2 = (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1). \quad (29)$$

Экспериментальное исследование колебаний слоистой жидкости. В качестве испытуемых жидкостей выбраны вода плотностью $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$, подсолнечное масло ($\rho_1 = 920 \text{ кг/м}^3$) и муравьиный спирт ($\rho_0 = 830 \text{ кг/м}^3$) со следующими параметрами: коэффициенты поверхностного натяжения для систем вода — подсолнечное масло $\sigma_1 = 0,013 \text{ Н/м}$ и подсолнечное масло — муравьиный спирт — $\sigma_2 = 0,02 \text{ Н/м}$; кинематическая вязкость воды $\nu_2 = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, подсолнечного масла — $\nu_1 = 39,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, муравьиного спирта — $\nu_0 = 1,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Экспериментальная установка (рис. 3) включает в себя основание 1, подвижную пластину 2, прозрачный бак 3, электромеханический возбудитель колебаний 4 и контрольно-измерительный комплекс. На основании — неподвижной пластине из текстолита — закреплены электромеханический возбудитель и металлические направляющие, обеспечивающие плавное движение без боковых вибраций подвижной пластины.

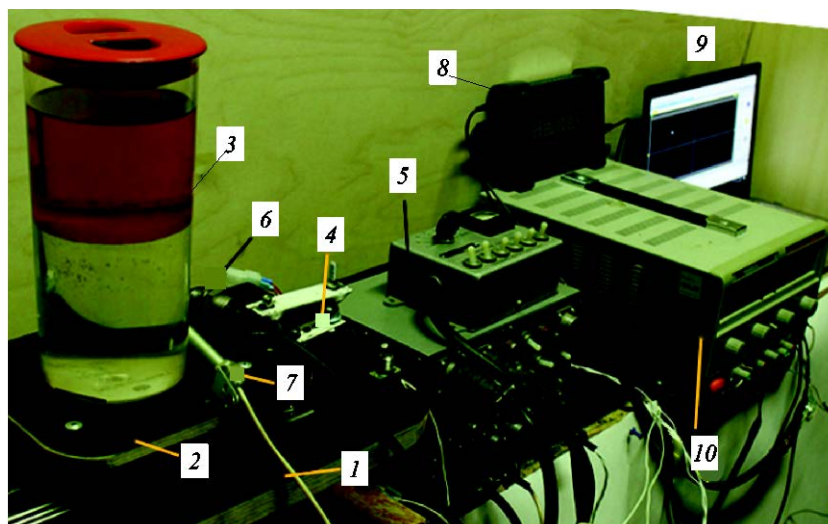


Рис. 3. Общий вид экспериментальной установки:

1 — основание; 2 — подвижная пластина; 3 — цилиндрический сосуд; 4 — электромеханический возбудитель; 5 — тензостанция ВИ6-6ТН; 6 — датчик давления; 7 — датчик перемещения; 8 — цифровой USB-осциллограф Hantek 6022BE; 9 — ноутбук ASUS; 10 — блок питания HY5003-2

Контрольно-измерительный комплекс состоит из тензостанции ВИБ-6ТН 5, датчиков давления 6 и перемещения 7, цифрового USB-осциллографа Hantek 6022BE 8, ноутбука 9 и блока питания НУ5003-2 10, размещенных на лабораторном столе вблизи неподвижного основания. Блок питания НУ5003-2 предназначен для питания тензостанции и электродвигателя. Управление и отображение данных осциллографа Hantek 6022BE осуществляется с помощью персонального компьютера/ноутбука/нетбука/планшета с операционной системой Windows через USB-интерфейс.

Кинематическая схема установки. В состав электромеханического возбудителя колебаний входят электродвигатель постоянного тока и кривошипно-шатунный механизм, осуществляющий возвратно-поступательное движение подвижной пластины.

В качестве виброизмерительной аппаратуры использовали шестиканальную малогабаритную индуктивную аппаратуру ВИБ-6ТН с полупроводниковым блоком питания. Установка ВИБ-6ТН предназначена для измерения вибрации, ускорений, давлений и перемещений. В основе работы аппаратуры лежит принцип амплитудной модуляции частоты индуктивными датчиками, включенными по дифференциально-трансформаторной схеме.

Экспериментальное определение основных характеристик колебаний слоистой жидкости. Для нахождения собственных частот колебаний слоистой жидкости применяли метод свободных колебаний. Для создания начальных условий свободных колебаний жидкостей подвижной платформе с баком задавали колебания посредством возвратно-поступательного движения вблизи резонансной частоты колебаний жидкостей. После некоторого времени совместных колебаний бака с жидкостями платформа мгновенно останавливалась, и жидкости совершали свободные колебания в неподвижном баке. При проведении эксперимента на ноутбуке регистрировались вынужденные и свободные колебания жидкостей, а также перемещения самого бака.

При проведении эксперимента можно выделить следующие этапы:

1) перед началом эксперимента определяли теоретическое значение частоты колебаний жидкостей в неподвижном баке по формулам (24) и (25);

2) проводили тарировку датчиков перемещения и давления, тарировку датчиков давления осуществляли путем добавления жидкости (воды) на определенную глубину;

3) испытуемый цилиндр освобождали от некоторой части воды и затем заполняли слоями жидкостей разной толщины для проведения эксперимента;

4) эксперимент повторяли снова при другой глубине средней жидкости;

5) по результатам записей экспериментов на ноутбуке определяли собственные частоты колебаний жидкостей.

Значения частот, определенных по формулам (24) и (25) и полученных экспериментально, приведены на рис. 4.

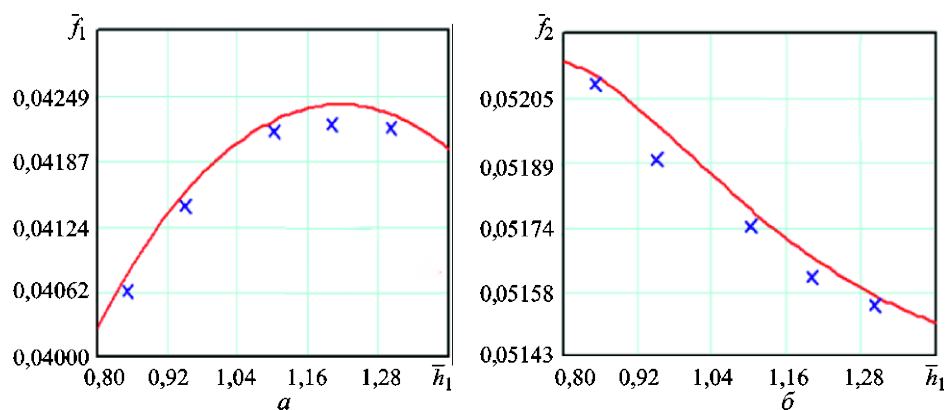


Рис. 4. Зависимости первой (а) и второй (б) главных частот от толщины слоя средней жидкости, определенные по формулам (24), (25) (сплошная кривая) и экспериментально (крестики) при $\bar{h}_0 = 0,6$, $\bar{h}_2 = 2,1 - \bar{h}_1$

На рис. 5 и 6 приведены типичные графики процессов, записанных при проведении экспериментов.

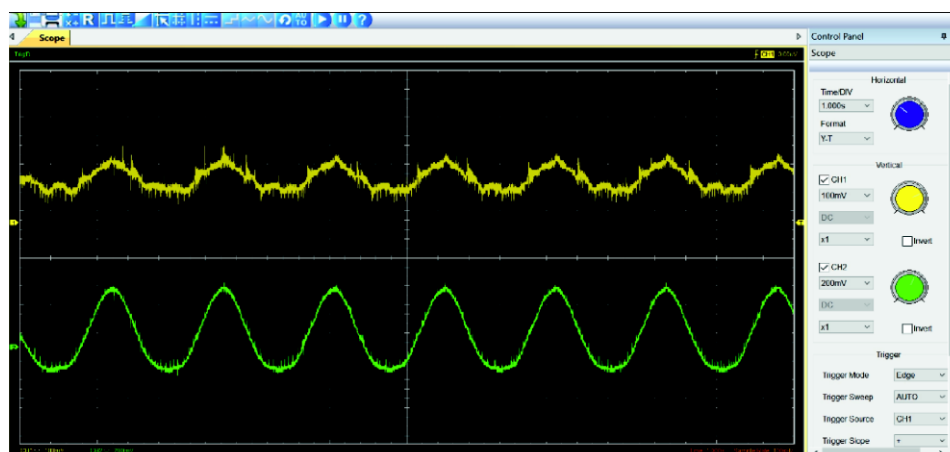


Рис. 5. Пример записи колебания подвижной платформы и вынужденных колебаний жидкостей

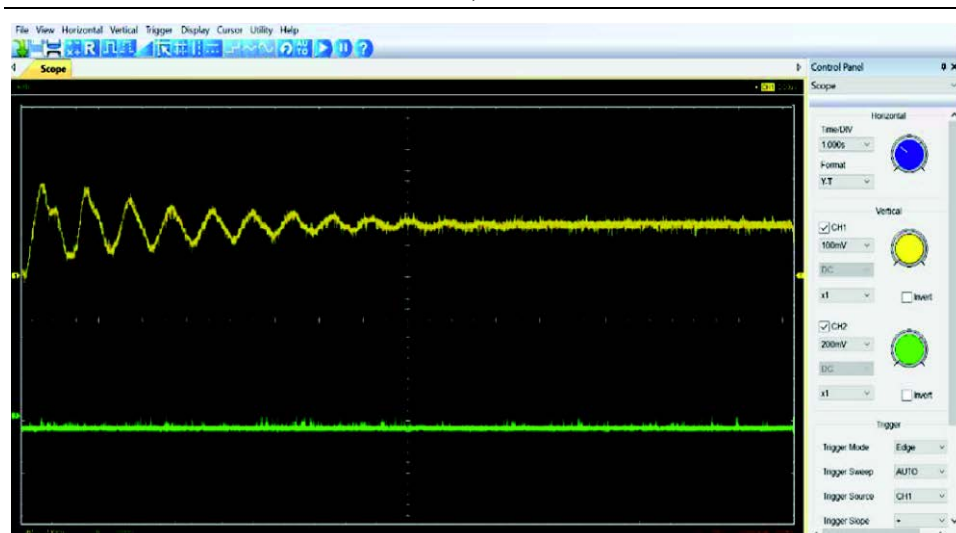


Рис. 6. Пример записи свободных колебаний жидкостей

Заключение. В работе получены уравнения движения твердого тела, совершающего поступательное движение и имеющего полость цилиндрической формы, полностью заполненную тремя однородными идеальными несмешивающимися жидкостями. Представленные формулы для массы преобразованного твердого тела, результаты численных расчетов и экспериментального исследования могут быть использованы при проектировании транспортных систем с криогенными жидкостями или сжиженными газами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуковский Н.Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной каплевой жидкостью. Избранные сочинения* [репр. изд.]. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
- [2] Чашечкин Ю.Д. Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 6 (57), с. 53.
- [3] Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости*. Киев, Наукова думка, 1992, 592 с.
- [4] Ганичев А.И., Качура В.П., Темнов А.Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде. *Колебания упругих конструкций с жидкостью*. Новосибирск, НЭТИ, 1974, с. 82–88.
- [5] Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения. *Наука и образование. Электронный журн.*, 2013, № 11. DOI: 10.7463/1113.0619258
- [6] Газиев Э.Л. Моделирование собственных колебаний системы «идеальная капиллярная жидкость — баротропный газ» в цилиндрическом контейнере. *Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2003)*. Симферополь, КНЦ НАНУ, 2013, т. 3, с. 51–52.

- [7] Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 7 (7). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-285 (дата обращения 21.09.2015).
- [8] Mikhayluk A.V., Timokha A.N. Variational Formulations for a Spectral Problem with Parameter on the Interface of Two Mediums. *Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 1995, iss. 45, no. 10, pp. 38–40.
- [9] Попов Д.Н., Панаиотти С.С., Рябинин М.В. *Гидромеханика*. Москва, 2014, 320 с.
- [10] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. *Дифференциальные уравнения математической физики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 185 с.
- [11] Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003, 520 с.
- [12] Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12 (24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1138 (дата обращения 20.05.2015).
- [13] Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 3, с. 57–69.
- [14] Нестеров С.В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости с произвольной частотой Брента — Вьяйсяля. *Доклады АН СССР*, 1983, т. 271, № 3, с. 570–573.
- [15] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение колебаний тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 1994, № 3, с. 53–60.

Статья поступила в редакцию 05.02.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Экспериментальное и теоретическое исследования колебаний твердого тела со слоистой жидкостью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1752>

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FARM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 октября 2017 г.

Вин Ко Ко — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: antt45@mail.ru

Experimental and theoretical study of vibrations of a rigid body with a layered liquid

© Win Ko Ko, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the problem of small movements of liquids and motion of the rigid body with a circular cylindrical cavity completely filled with three incompressible perfect liquids. Assuming vortex-free motion of liquid, boundary value problems are formulated and solutions are obtained for displacement potentials of the particles of liquids. The equations of hydromechanical system motion are obtained using the Lagrange equations of the 2nd kind. The difference between motions of a rigid body with a cavity filled with liquids and motion in the case considered by N.E. Zhukovsky is shown. The problems of the natural liquid vibrations in a stationary tank and the motion of a rigid body with liquids are considered as well as formulae, determining the natural frequencies and modes of vibration. The article presents the results of the experimental study of motion of rigid body and liquids.

Keywords: rigid body, liquid, natural frequencies, mode of vibration

REFERENCES

- [1] Zhukovsky N.E. O dvizhenii tverdogo tela, imeushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapelnoy zhidkostyu [On the motion of a rigid body with cavities filled with a homogeneous dropping liquid]. In: *Izbrannye sochineniya* [Selected works]. Moscow, BMSTU Publ., 2017.
- [2] Chashechkin Yu.D. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2014, no. 6 (57), p. 53.
- [3] Babsky V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevsky N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods for solving hydromechanics problems for zero-gravity conditions]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1992, 592 p.
- [4] Ganichev A.I., Kachura V.P., Temnov A.N. Malye kolebaniya dvukh nesmeshivayushchikhsya zhidkostey v podvizhnom tsilindricheskom sosude [Small oscillations of two immiscible liquids in a movable cylindrical vessel]. In: *Kolebaniya uprugikh konstruksiy s zhidkostyu* [Vibration of elastic structures with liquid]. Novosibirsk, NETI Publ., 1974, pp. 82–88.
- [5] Goncharov D.A. *Nauka i obrazovanie: elektronnyy nauchno-tekhnicheskij zhurnal — Science and Education: Electronic Scientific and technical Journal*, 2013, no. 11. DOI: 10.7463/1113.0619258
- [6] Gaziev, E.L. Modelirovanie sobstvennykh kolebaniy sistemy “idealnaya kapillyarnaya zhidkost — barotropnyy gas” v tsilindricheskom konteynere [Modeling of natural vibrations of the system “perfect liquid-barotropic gas” in a cylindrical container]. In: *Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2003)*. Simferopol, KNTs NANU Publ., 2013, vol. 3, pp. 51–52.
- [7] Kolesnikov K.S., Pozhalostin A.A., Shkapov P.M. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, iss. 7 (7). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-285 (accessed September 21, 2015).
- [8] Mikhayluk A.V. Timokha A.N. *Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 1995, vol. 45, no. 10, pp. 38–40.

- [9] Popov D.N., Panaiotti, S.S., Ryabinin V.M. *Gidromekhanika* [Fluid Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 320 p.
- [10] Martinson L.K., Malov, Yu.I. *Differentsialnye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, BMSTU Publ., 2002, 185p.
- [11] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [The dynamics of rockets]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003, 520 p.
- [12] Kalinichenko V.A., So Aung Naing. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12 (24). Available at: <http://engjournal.ru/cata...g/teormech/1138/html> (accessed May 20, 2015).
- [13] Temnov A.N., Win Ko Ko. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2016, no. 3, pp. 57–69.
- [14] Nesterov C. B. *Doklady AN SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1983, vol. 271, no. 3, pp. 570–573.
- [15] Akulenko L.D., Nesterov S.V. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics*, 1994, no. 3, pp. 53–60.

Win Ko Ko, post-graduate student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Temnov A.N., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: antt45@mail.ru