

## Математическое и компьютерное моделирование манипуляторов с нелинейной геометрической связью

© А.Я. Красинский<sup>1</sup>, А.Н. Ильина<sup>2</sup>, Э.М. Красинская<sup>3</sup>,  
А.С. Рукавишников<sup>4</sup>

<sup>1</sup>МГУПП, Москва, 125080, Россия

<sup>2</sup>МАИ, Москва, 125993, Россия

<sup>3</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>4</sup>ООО «САУНО», Москва, 109651, Россия

*Построены математические модели и решены задачи стабилизации стационарных движений для двух манипуляторов с избыточной координатой и нелинейной геометрической связью в электроприводе: вращающегося манипулятора и четырехколесного мобильного манипулятора с упругим подвесом. Используемый здесь метод разработан ранее для голономных и неголономных систем с дифференциальными связями с применением теории критических (особенных) случаев Ляпунова в нелинейной теории устойчивости. Динамика механической части манипуляторов описана с помощью уравнений в форме, разработанной М.Ф. Шульгиным, для систем с избыточными координатами, не содержащих множителей связей. В качестве управления принято напряжение на якорной обмотке исполнительного электрического двигателя, уравнения динамики которого описывает второй закон Кирхгофа. Замкнутая система представляет собой систему непрямого управления. Закон управления определен решением линейно-квадратичной задачи стабилизации методом Красовского для выделенной подсистемы, не включающей в себя критическую переменную, которая соответствует нулевому корню. Коэффициенты управляющих воздействий были найдены путем решения матричного алгебраического уравнения Риккати с помощью программ, разработанных в системе MATLAB и учитывающих условия, налагаемые геометрической связью на возмущения координат.*

**Ключевые слова:** геометрические связи, избыточные координаты, уравнения Шульгина, стабилизация, стационарное движение, манипулятор

**Введение.** В настоящее время в области робототехники актуальны проблемы моделирования и стабилизации установившихся движений для систем со сложными геометрическими связями. Манипуляторы относятся к одному из важнейших классов таких управляемых механических систем. Несмотря на большое количество публикаций (расширенные библиографические списки доступны в работах [1–3]), изучение динамики манипуляторов остается по-прежнему неотложной задачей как технической практики, так и теории управления.

Одна из основных трудностей при построении математических моделей манипуляторов связана с необходимостью учета сложных нелинейных геометрических связей, не позволяющих описать конфигурацию системы независимыми параметрами. Геометрические связи налагают ограничения на координаты и их скорости. Уравнения Ла-

гранжа второго рода не применяются для систем, описываемых зависимыми координатами. Для этого обычно используют уравнения Лагранжа с множителями связей [4, 5], однако они увеличивают размерность системы и затрудняют анализ устойчивости. Линеаризация уравнений геометрических связей и использование только первого приближения связей [6] не всегда приводят к точным результатам, особенно при исследовании устойчивости установившихся движений. При построении соответствующих математических моделей следует учитывать и нелинейные члены разложения геометрических связей [7]. Альтернативный способ заключается в использовании уравнений в избыточных координатах в форме, разработанной М.Ф. Шульгиным [8], вместе с линейными дифференциальными связями, которые получают дифференцированием геометрических. Эти уравнения свободны от множителей связей, их можно рассматривать как частный случай уравнений Воронца [9] для неголономных систем. Такой подход позволяет создать строгие нелинейные математические модели голономных систем с избыточными координатами с учетом полных уравнений геометрических связей, что особенно важно для решения задач устойчивости и стабилизации.

На основе векторно-матричных уравнений движения систем с дифференциальными связями и теории критических случаев [10–12] в работах [13–21] представлен метод решения задачи устойчивости и стабилизации для систем с нелинейными геометрическими связями. Стабилизирующее управление определяется методом, разработанным [13, с. 475-514] для линейной управляемой подсистемы, не включающей в себя уравнение дифференциальной связи. В отличие от этого метода [13], в предлагаемом в работах [13–21] методе в замкнутой этим управлением полной нелинейной системе характеристическое уравнение обязательно имеет нулевые корни, количество которых соответствует количеству дифференциальных связей (или избыточных координат). Вследствие этого возникает необходимость применения методов [11, 12] теории критических (особенных) случаев нулевых корней и приведения системы уравнений к специальному виду, а также доказательства [11, 20] теорем об асимптотической устойчивости установившихся движений и положений равновесия систем с избыточными координатами. Согласно этим теоремам, линейное управление, полученное для управляемой подсистемы (не содержащей критических переменных), обеспечивает асимптотическую устойчивость для всех фазовых переменных полной нелинейной системы, несмотря на наличие нулевых корней (соответствующих избыточным координатам).

Цель работы — практическое применение разработанных методов для математического моделирования и стабилизации стационарных движений мехатронных устройств с геометрическими связями.

В качестве примеров рассмотрены два различных электромеханических манипулятора с аналогичной геометрической связью: однозвенный вращающийся манипулятор и мобильный манипулятор с упругим подвесом. Для каждого устройства построена математическая модель на основе уравнений в форме, разработанной М.Ф. Шульгиным, определены параметры стационарных движений и вычислены коэффициенты управляющих воздействий, которые стабилизируют движение системы. По результатам работы найденных управлений построены графики переходных процессов. Компьютерные расчеты проведены посредством специальных программ, написанных для исследуемых манипуляторов в системе MATLAB.

**Вращающийся манипулятор с геометрической связью.** Электромеханический вращающийся манипулятор (рис. 1) состоит из механической части (имеющей две степени свободы) и двух исполнительных механизмов  $P_1$  и  $P_2$ . Конфигурация механической части этой системы определяется тремя координатами: углом  $a$  между рычагом  $OM$  и вертикальной осью  $OX$ , углом  $b$  поворота манипулятора вместе со стержнем  $OC$  вокруг вертикали и углом  $p$  поворота приводного колеса электродвигателя  $P_2$ . Аэрограф или другой рабочий инструмент массой  $m$  удерживается в механическом захвате  $M$ . Для упрощения модели принято, что массы рычага  $OM$  и соединительных стержней  $OC$  и  $AB$  пренебрежимо малы.

Предположим, что центры масс приводных механизмов расположены на оси  $KK$ .  $J_b$  и  $J_p$  — приведенные моменты инерции соответственно относительно оси  $KK$  и оси двигателя  $P_2$ . В точках  $A$ ,  $B$ ,  $O$  находятся цилиндрические шарниры, стержень  $OC$  жестко соединен с осью  $KK$  в точке  $C$ . Введем обозначения:  $D = OA$ ;  $h = MA$ ;  $l = AB = OC$ ;  $d$  — радиус приводного колеса электродвигателя  $P_2$ . В приводах будем использовать двигатели постоянного тока с непрямым возбуждением. Необходимо получить математическую модель электромеханической системы и проанализировать устойчивость установившегося движения. Введенные для механической части три координаты являются зависимыми; уравнение геометрической связи (с учетом того, что

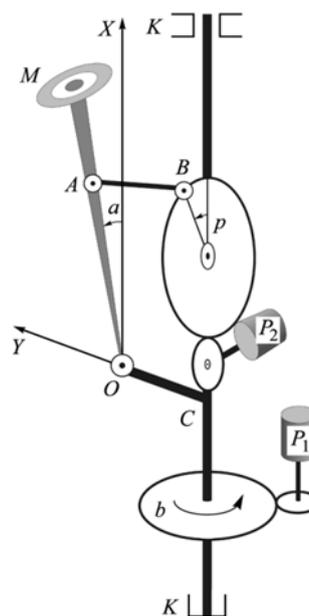


Рис. 1. Схема вращающегося манипулятора

расстояние  $l$  между точками  $A$  и  $B$  — постоянное), выраженное в принятых координатах, принимает вид

$$(D(\cos a - 1) + d(1 - \cos p))^2 + (D \sin a + l - d \sin p)^2 = l^2. \quad (1)$$

Эта нелинейная связь не позволяет в приемлемом виде выразить одну координату через другую, поэтому целесообразно описать систему в избыточных координатах. Пусть  $p$  — избыточная координата (из выражения (1) очевидно, что  $a$  можно выбрать как избыточную координату вместо  $p$ ). Дифференцируя уравнение (1) по времени, из линейного уравнения кинематической связи можно явно выразить зависимую скорость через независимую:

$$\dot{p} = B(a, p)\dot{a}; \quad B(a, p) = \frac{D(d \sin(a - p) + (D - d) \sin a + l \cos a)}{d(D \sin(a - p) + (D - d) \sin p + l \cos p)} \dot{a}. \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = \left( \frac{m}{2} (l + (D + h) \sin a)^2 + \frac{J_b}{2} \right) \dot{b}^2 + \frac{J_p}{2} \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m (D + h)^2 \dot{a}^2;$$

потенциальную энергию можно выразить уравнением

$$\Pi = mg(D + h) \cos a. \quad (3)$$

Исключая зависимую скорость из кинетической энергии, получаем

$$T^* = \left( \frac{m}{2} (l + (D + h) \sin a)^2 + \frac{J_b}{2} \right) \dot{b}^2 + \frac{J_p}{2} B^2(a, p) \dot{a}^2 + \frac{1}{2} m (D + h)^2 \dot{a}^2.$$

Неконсервативными силами, действующими на систему, являются

$$\tilde{Q}_p = -f_p \dot{p} + k_p I_p \quad \text{и} \quad \tilde{Q}_b = -f_b \dot{b} + k_b I_b,$$

где  $k_p, k_b$  — электромеханические постоянные приводов постоянного тока;  $f_p, f_b$  — коэффициенты сопротивления;  $I_p, I_b$  — сила тока в цепи якоря первого и второго приводов соответственно.

Обратим внимание, что система имеет по одной позиционной, циклической и избыточной координате.

Используя обозначения  $L^* = T^* - \Pi$  для функции Лагранжа, записываем уравнения движения в форме Шульгина [8]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial L^*}{\partial a} = B(a, p) \left( \frac{\partial L^*}{\partial p} + \tilde{Q}_p \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{b}} = \tilde{Q}_b. \end{cases} \quad (4)$$

На основе второго закона Кирхгофа уравнения динамики двигателей принимают форму [1]:

$$L_b \frac{dI_b}{dt} + R_b I_b + K_b \dot{b} = e_b; \quad L_p \frac{dI_p}{dt} + R_p I_p + K_p B(a, p) \dot{a} = e_p, \quad (5)$$

где  $L_b, L_p$  — индуктивность в катушке якоря;  $R_b, R_p$  — сопротивления якоря;  $I_b, I_p$  — сила тока якоря;  $K_b, K_p$  — коэффициенты преобразователя напряжения питания;  $e_b, e_p$  — напряжения.

Математическую модель динамики системы составляют уравнения (1), (2), (4), (5).

Манипулятор может вращаться с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси  $KK$  для заданного угла между рычагом  $OM$  и осью  $OX$ :

$$a = a_0 = \text{const}; \quad p = p_0 = \text{const}; \quad \dot{b} = \dot{b}_0 = \text{const}. \quad (6)$$

Уравнения для определения остальных параметров стационарного движения можно получить, подставив выражения (6) в уравнения (4) и (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} I_p = I_{p0} = - \frac{mg(D+h) \sin a_0 + \dot{b}_0^2 m (l + (D+h) \sin a_0) (D+h) \cos a_0}{k_p B(a_0, p_0)} = \text{const}; \\ I_b = I_{b0} = \frac{f_b \dot{b}_0}{k_b} = \text{const}; \\ e_p = e_{p0} = R_p I_{p0}; \quad e_b = e_{b0} = R_b I_{b0} + K_b \dot{b}_0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Введем обозначения для возмущений переменных состояния:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + x_1; \quad \dot{a} = x_2; \quad \dot{b} = \dot{b}_0 + x_3; \quad I_b = I_{b0} + x_4; \\ I_p &= I_{p0} + x_5; \quad p = p_0 + x_6; \quad e_p = e_{p0} + u. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда первое приближение уравнений возмущенного движения в окрестности стационарного движения можно привести к виду

$$\dot{y} = My + Nu, \quad (9)$$

где  $y' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  — вектор состояния;  $M, N$  — постоянные матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} & m_{26} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & m_{52} & 0 & 0 & m_{55} & 0 \\ 0 & B(a_0, p_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Расчет коэффициентов матриц осуществляют по формулам

$$m_{21} = \frac{1}{\tau_3} \left[ \tau_1 \left( (D+h) \cos^2 a_0 - \tau_2 \sin a_0 \right) \dot{b}_0^2 + g \tau_1 \cos a_0 + k_p \left. \frac{\partial B}{\partial a} \right|_0 I_{p0} \right];$$

$$m_{22} = -\frac{f_p B^2(a_0, p_0)}{\tau_3}; \quad m_{26} = \frac{k_p \left. \frac{\partial B}{\partial a} \right|_0 I_{p0}}{\tau_3}; \quad m_{23} = \frac{2\tau_1 \tau_2 \cos a_0}{\tau_3} \dot{b}_0;$$

$$m_{25} = \frac{k_p B(a_0, p_0)}{\tau_3}; \quad m_{32} = -\frac{2\tau_1 \tau_2 \cos a_0}{\tau_4} \dot{b}_0; \quad m_{33} = -\frac{f_b}{\tau_4}; \quad m_{34} = \frac{k_b}{\tau_4};$$

$$m_{43} = -\frac{K_b}{L_b}; \quad m_{44} = -\frac{R_b}{L_b}; \quad m_{52} = -\frac{K_p B(a_0, p_0)}{L_p}; \quad m_{55} = -\frac{R_p}{L_p}; \quad n = \frac{1}{L_p};$$

$$\tau_1 = m(D+h); \quad \tau_2 = l + (D+h) \sin a_0;$$

$$\tau_3 = J_p B^2(a_0, p_0) + m(D+h)^2; \quad \tau_4 = m\tau_2^2 + J_b.$$

Символами  $\left. \frac{\partial B}{\partial a} \right|_0$  и  $\left. \frac{\partial B}{\partial p} \right|_0$  обозначены значения частных производ-

ных функции  $B(a, p)$  на движении (6).

Проведем в полных уравнениях (2), (4), (5) неособенную линейную замену [18, 19], аналогичную замене в работе [22], предложенной для неголономных систем:

$$x_6 = z + B(a_0, p_0)x_1, \quad (10)$$

для выделения критической переменной, соответствующей нулевому корню в уравнении кинематической связи (2). При этом компоненты матриц  $M, N$  изменятся вследствие этой замены, а система (9) будет приведена к специальному виду Ляпунова в теории критических случаев [11, 12]. Выберем подсистему, не включающую в себя уравнение связи и, соответственно, критическую переменную  $z$ :

$$\dot{x} = M_1 x + N_1 u, \quad (11)$$

где  $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{m}_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix}; \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{m}_{21} = m_{21} + B(a_0, p_0)m_{26}$  — измененный коэффициент вследствие замены (10).

Условие управляемости для уравнения (11) выполнимо всегда.

Управляющее воздействие  $u = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4 + l_5 x_5$  определяется решением линейно-квадратичной задачи стабилизации методом Красовского [13, с. 475–514]. Коэффициенты функции Ляпунова находим посредством решения матричного алгебраического уравнения Риккати. Для их однозначного определения можно выбрать самый простой критерий качества в виде

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + u^2) dt \rightarrow \min.$$

Графики нескольких переходных процессов, демонстрирующих стабилизацию системы найденным управлением, приведены на рис. 2. Для расчетов использовались параметры:

$a$ , рад .....	0,1	$b_0$ , рад/с .....	5 $\pi$
$l$ , м .....	0,3	$K_p = K_b$ .....	0,02
$m$ , кг .....	1,0	$k_p = k_b$ .....	0,2
$h$ , м .....	0,3	$J_p = J_b$ , кг/м <sup>2</sup> .....	0,5
$d$ , м .....	0,2	$L_p = L_b$ , Н .....	0,002
$D$ , м .....	0,6	$R_p = R_b$ , Ом .....	10
$g$ , м/с <sup>2</sup> .....	9,8	$f_p = f_b$ .....	0,02

Такой подход позволяет стабилизировать любое установившееся движение этого манипулятора. Однако для рассматриваемой конструкции манипулятора можно выделить стабильные режимы работы даже при постоянном напряжении на приводных двигателях. Здесь они имеют значение программных управлений, обеспечивая реализацию данного режима работы.

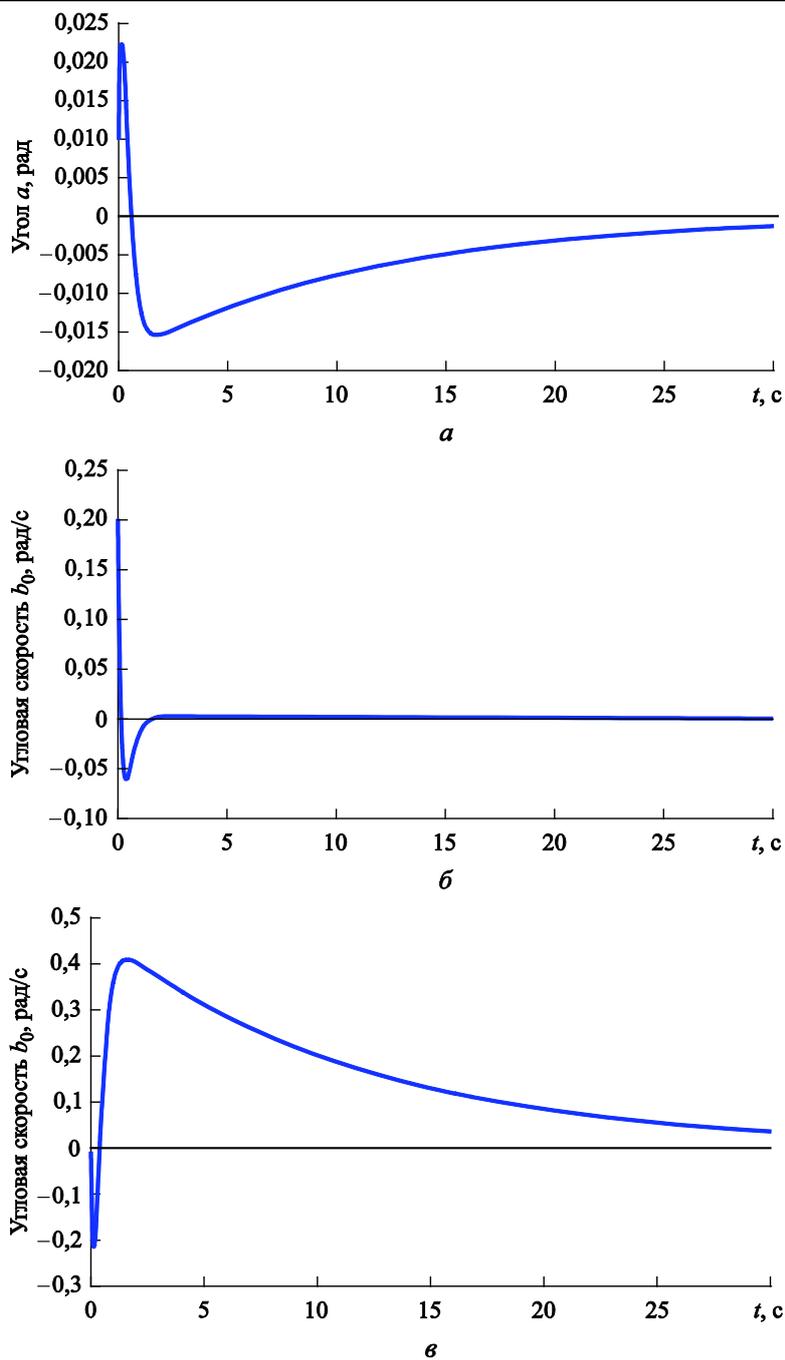


Рис. 2. Переходный процесс по переменным  $x_1$  (а),  $x_2$  (б),  $x_3$  (в)

**Мобильный однозвенный манипулятор с упругим подвесом.** Манипулятор в стационарном режиме (рис. 3) должен двигаться прямолинейно с постоянной скоростью и держать зажим (например, с камерой или сканером) на определенной высоте.

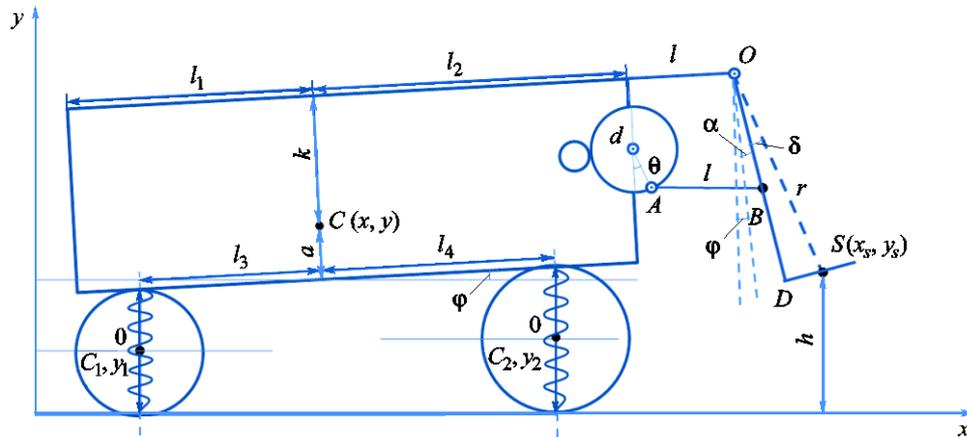


Рис. 3. Схема мобильного однозвенного манипулятора с упругим подвесом в системе координат  $X, Y$

Уравнение связи аналогично выражению (1), поскольку расстояние между точками  $A$  и  $B$  постоянное. В точках  $A, B, O$  находятся цилиндрические шарниры.

Упругий подвес на задних и передних колесах моделируется как две пружины с жесткостью соответственно  $C_1$  и  $C_2$ . Длина недеформированных пружин равна  $y_1^0$  и  $y_2^0$  соответственно.

Считаем, что корпус манипулятора — жесткое тело массой  $M$  и моментом инерции относительно поперечной оси  $J_c$ . Для упрощения модели массами стержней  $AB$  и  $OD$  можно пренебречь, тогда рабочий инструмент представляем материальной точкой  $S$  массой  $m$ .

В системе есть два привода: один обеспечивает постоянную продольную скорость манипулятора, другой — регулирует угол наклона стержня  $OD$  для поддержания рабочего инструмента на заданной высоте. В качестве управления принимается дополнительное напряжение на втором двигателе. Стабилизация заданной скорости продольного движения обеспечивается путем создания момента на первом приводе, который компенсирует силу сопротивления при заданной продольной скорости движения. Его действие компенсируется силой  $P$  (силу  $P$  можно рассматривать как зависящую от скорости силу особой структуры [23]). Определение соответствующего напряжения на приводном двигателе здесь не рассматривается в связи с упрощением модели.

Докажем устойчивость системы с выбранным методом управления и найдем закон управления как линейную функцию координат вектора состояния.

Введем систему координат (см. рис. 3). Геометрическую конфигурацию системы описывают следующие параметры:  $C(x, y)$  — центр

массы тела;  $\varphi$  — угол наклона корпуса, измеренный от горизонтали;  $\alpha$  — угол наклона стержня  $OD$  (см. рис. 3);  $\theta$  — угол поворота приводного колеса электродвигателя.

Получаем уравнение нелинейной геометрической связи, выражающей постоянство длины стержня  $AB$  в выбранных координатах:

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2, \quad (12)$$

где  $L = OB$ ;  $d$  — радиус приводного колеса электродвигателя.

В качестве избыточной координаты выбираем угол  $\theta$ .

Продифференцировав выражение (12) по времени, из линейного уравнения кинематической связи выражаем скорость изменения зависимой координаты  $\dot{\theta}$  как

$$\dot{\theta} = B(\alpha, \theta) \cdot \dot{\alpha}, \quad B(\alpha, \theta) = \frac{L(d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha)}{d(L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta)}. \quad (13)$$

Кинетическую энергию системы запишем как сумму кинетической энергии кузова  $T_{\text{куз}}$ , рабочего инструмента  $T_s$  и привода  $T_{\text{п}}$ :

$$T = T_{\text{куз}} + T_s + T_{\text{п}},$$

где

$$\begin{aligned} T_{\text{куз}} &= \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_c}{2}\dot{\varphi}^2; \quad T_s = \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2); \quad T_{\text{п}} = \frac{J_{\theta}}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2; \\ \dot{x}_s &= \dot{x} - \tau_1(\alpha, \varphi)\dot{\varphi} + r \cos(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha}; \\ \dot{y}_s &= \dot{y} - \tau_2(\alpha, \varphi)\dot{\varphi} + r \sin(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha}; \\ \tau_1(\alpha, \varphi) &= k \cos \varphi + (l + l_2) \sin \varphi - r \cos(\alpha + \delta + \varphi); \\ \tau_2(\alpha, \varphi) &= k \sin \varphi - (l + l_2) \cos \varphi - r \sin(\alpha + \delta + \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

Потенциальную энергию системы также запишем в виде суммы трех составляющих: потенциальной энергии кузова  $\Pi_{\text{куз}}$ , рабочего инструмента  $\Pi_s$  и пружин  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ :

$$\Pi = \Pi_{\text{куз}} + \Pi_s + \Pi_1 + \Pi_2;$$

$$\Pi_{\text{куз}} = Mgy, \quad \Pi_s = mg(y + \tau_1(\alpha, \varphi)), \quad \Pi_i = C_i \frac{(y_i(y, \varphi) - y_i^0)^2}{2}, \quad i = 1, 2.$$

$$y_i(y, \varphi) = y - a \cos \varphi - (-1)^i l_{i+2} \sin \varphi, \quad i = 1, 2.$$

Динамику коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением описываем [1] вторым законом Кирхгофа:

$$L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a + K_a \frac{d\theta}{dt} = e_v, \quad (15)$$

где  $L_a$  — индуктивность обмотки якоря;  $R_a$  — сопротивление якоря;  $I_a$  — сила тока в цепи якоря;  $K_a$  — коэффициент преобразователя питания;  $e_v$  — напряжение на выходе усилителя, подающего питание на якорную обмотку двигателя.

Используем выражение (13) для исключения  $\dot{\theta}$  из выражения кинетической энергии, при этом изменится только кинетическая энергия привода:

$$T_{\pi} = \frac{J_{\theta}}{2} (B(\alpha, \theta)\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2.$$

С учетом действующих на систему сил запишем уравнения движения в форме Шульгина в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L^*}{\partial y} = -b_0 \dot{y}; & \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = P - b_2 \dot{x}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = B(\alpha, \theta) \left( -b_1 B(\alpha, \theta) \dot{\alpha} + b_3 I + \frac{\partial L^*}{\partial \theta} \right); & \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L^*}{\partial \phi} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где  $L^* = T^* - \Pi$  — функция Лагранжа;  $b_0, b_1, b_2, b_3$  — заданные постоянные.

Для получения полной математической модели к этим уравнениям необходимо добавить уравнения (13) и (15).

Координата  $x$  является циклической. В рассматриваемой задаче существует стационарное движение

$$y = y_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \phi = \phi_0, \quad I_a = I_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{x} = v, \quad (17)$$

параметры которого определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} P - b_2 v = 0; \\ (M + m)g + C_1 (y_1(y_0, \phi_0) - y_1^0) + C_2 (y_2(y_0, \phi_0) - y_2^0) = 0; \\ mgr \sin(\alpha_0 + \delta + \phi_0) = B(\alpha_0, \theta_0) b_3 I_0; \\ -mg \tau_2(\alpha_0, \phi_0) + C_1 (y_1(y_0, \phi_0) - y_1^0) (a \sin \phi_0 + l_3 \cos \phi_0) + \\ + C_2 (y_2(y_0, \phi_0) - y_2^0) (a \sin \phi_0 + l_4 \cos \phi_0) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для однозначного определения координат добавим уравнение геометрической связи (12) и выражение для заданной высоты  $h_0$  рабочего инструмента:

$$h_0 = y_0 + k \cos \varphi_0 + (l + l_2) \sin \varphi_0 - r \cos(\alpha_0 + \delta + \varphi_0). \quad (19)$$

Решение системы (18) и уравнения (19) было найдено численно в системе MATLAB при предварительном проведении дополнительного исследования для определения области, в которой эта система имеет единственное решение.

Вводим возмущения:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + x_1, \quad \dot{y} = x_2, \quad \alpha = \alpha_0 + x_3, \quad \dot{\alpha} = x_4, \quad \dot{x} = x_5, \\ \varphi &= \varphi_0 + x_6, \quad \dot{\varphi} = x_7, \quad I = I_0 + x_8, \quad \theta = \theta_0 + x_9, \quad e_v = e_v^0 + u \end{aligned} \quad (20)$$

и выделяем первое приближение в уравнениях возмущенного движения, полученных из уравнений (13), (15), (16). Приводим уравнения возмущенного движения к нормальному виду, в результате имеем

$$\dot{x}' = Ax + Su + X^{(2)}, \quad (21)$$

где  $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$  — фазовый вектор;  $A, S$  — числовые матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & 0 & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ 0 & 0 & 0 & a_{84} & 0 & 0 & 0 & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & a_{94} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{L_a}.$$

Последнее уравнение системы (21) получено из кинематической связи (13), в которой выделено первое приближение, и имеет вид

$$\dot{x}_9 = B(\alpha_0, \theta_0)x_4 + X_\theta^{(2)}(x). \quad (22)$$

Проводим в выражении (21) линейную замену, аналогичную уравнению (10):

$$x_9 = B(\alpha_0, \theta_0)x_3 + z.$$

Такая замена выделяет критическую переменную  $z$ , соответствующую нулевому корню характеристического уравнения, уравнение связи принимает вид  $z = \tilde{X}_\theta^{(2)}(x_3, z)$ . Далее выделяем линейную управляемую подсистему, не содержащую критическую переменную  $z$ :

$$\dot{w} = A_1 w + S_1 u, \quad w' = (x_1, \dots, x_8). \quad (23)$$

Обратим внимание, что проведенная замена приводит к изменению компонент, соответствующих фазовой переменной  $x_3$  (измененные коэффициенты обозначены  $\tilde{a}_{ij}$ ):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \tilde{a}_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \tilde{a}_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & a_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & \tilde{a}_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & a_{57} & a_{58} \\ a_{71} & a_{72} & \tilde{a}_{73} & a_{74} & a_{75} & 0 & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & a_{84} & 0 & 0 & 0 & a_{88} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}.$$

При выполнении условия управляемости для выражений (23), как и для первого манипулятора, коэффициенты управления находят методом Красовского (см. [13]) посредством решения матричного алгебраического уравнения Риккати. На рис. 4 приведены графики некоторых переходных процессов при найденном управлении. Для расчетов использовались следующие параметры мобильного манипулятора:

$M$ , кг .....	250	$l_2$ , м .....	0,65	$d$ , м .....	0,07
$m$ , кг .....	25	$l_3$ , м .....	0,45	$L$ , м .....	0,19
$g$ , м/с <sup>2</sup> .....	9,81	$l_4$ , м .....	0,50	$l$ , м .....	0,1
$a$ , м .....	0,125	$r$ , м .....	0,47	$y_0^1$ , м .....	0,20
$k$ , м .....	0,275	$\delta$ , град .....	10	$y_0^2$ , м .....	0,25
		$C_1$ , Н/м .....	1,02e + 0,5		
		$C_2$ , Н/м .....	1,03e + 0,5		

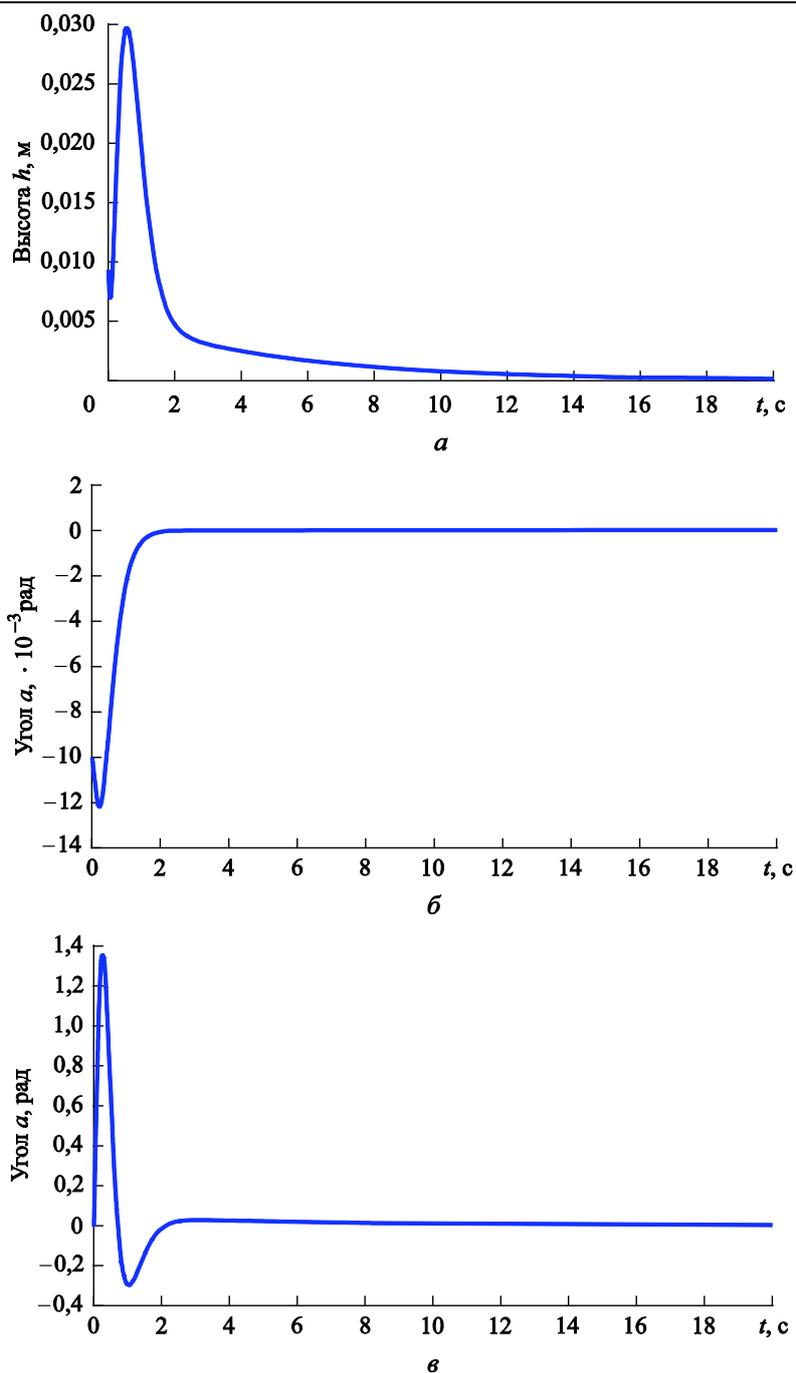


Рис. 4. Переходный процесс по переменным  $x_1$  (а),  $x_3$  (б),  $x_6$  (в)

**Заключение.** Для обоих манипуляторов первое приближение уравнений возмущенного движения зависит от частных производных по угловым координатам и от коэффициента кинематической связи,

поскольку для существования стационарного режима необходим постоянный момент (сила тока не равна нулю). Отсюда следует, что при изучении вопроса устойчивости в этой задаче нельзя ограничиваться линейным приближением геометрической связи, а необходимо учитывать квадратичные члены ее разложения в окрестности стационарного режима. Такое же заключение сделано в работах [5, 15], но для устойчивости равновесия Раус [5] использовал уравнения с множителями связей.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. *Основы управления манипуляционными роботами*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 480 с.
- [2] Вукобратович М., Стоич Д., Кирчански Н. *Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами*. Москва, Мир, 1989, 376 с.
- [3] Матюхин В.И. *Управление механическими системами*. Москва, Физматлит, 2009, 320 с.
- [4] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. Москва, Физматлит, 1961, 824 с.
- [5] Раус Э.Дж. *Динамика системы твердых тел*. Москва, Наука, 1983, т. 2, 544 с.
- [6] Min-Sung Koo, Ho-Lim Choi, Jong-Tae Lim. Adaptive nonlinear control of a Ball and Beam system using centrifugal force term. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2012, vol. 8, no. 9, pp. 5999–6009.
- [7] Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий. *Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. Вып. 29*, В.А. Самсонов, ред. Москва, Издательство Московского университета, 2015, с. 54–65.
- [8] Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. *Труды. Новая серия. Вып. 144: Физико-математические науки. Кн. 18*. Ташкент, Изд-во САГУ, 1958, 183 с.
- [9] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. *Динамика неголономных систем*. Москва, Наука, 1967, 519 с.
- [10] Красинская Э.М., Красинский А.Я., Обносков К.Б. О развитии научных методов школы М.Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами. *Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. Вып. 28*, В.А. Самсонов, ред. Москва, Издательство Московского университета, 2012, с. 169–184.
- [11] Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами. *Наука и образование*, 2013, № 3. DOI: 10.7463/0313.0541146
- [12] Ляпунов А.М. *Собрание сочинений. В 6 т.* Москва – Ленинград, Издательство Академии наук СССР, 1956, т. 2, 472 с.
- [13] Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения*. 2 изд., испр. Москва, Наука, 1966, 530 с.
- [14] Красинская–Тюменева Э.М., Красинский А.Я. О влиянии структуры сил на устойчивость положений равновесия неголономных систем. *Вопросы вычислительной и прикладной математики*, 1977, вып. 45, с. 172–186.
- [15] Красинская Э.М. К стабилизации стационарных движений механических систем. *ПММ*, 1983, т. 47, вып. 2, с. 302–309.

- [16] Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем. *ПММ*, 1988, т. 52, вып. 2, с. 194–202.
- [17] Красинский А.Я. О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами. *ПММ*, 1992, т. 56, вып. 6, с. 939–950.
- [18] Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем. VIII Междунар. семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2–4 июня 2004 г.), *Автоматика и телемеханика*, 2004, № 1, с. 97–103.
- [19] Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации установившихся движений механических систем с избыточными координатами. *Тр. XII Всерос. совещ. по проблемам управления (Москва, 16–19 июня 2014 г.)*. Москва, ИПУ РАН, 2014, с. 1766–1778.
- [20] Красинский А.Я., Красинская Э.М. Об одном методе стабилизации установившихся движений с нулевыми корнями в замкнутой системе. *Автоматика и телемеханика*, 2016, вып. 8, с. 85–100.
- [21] Krasinskiy A.Ya., Krasinskaya E.M., Ilyina A.N. About mathematical models of system dynamics with geometric constraints in problems of stability and stabilization by incomplete state information. *International Robotics and Automation Journal*, 2017, vol. 2 (1): 00007. DOI: 10.15406/iratj.2017.02.00007
- [22] Aizerman M.A., Gantmacher F.R. Stabilitaet der gleichgewichtslage in einem nicht holonomen system. *ZAMM*, 1957, Bd. 37, No. 1/2, S. 74–75. DOI: 10.1002/zamm.19570370112
- [23] Румянцев В.В. *Об устойчивости стационарных движений спутников*. Москва, ВЦ АН СССР, 1967, 155 с.

Статья поступила в редакцию 29.12.2017

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FARM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24 – 27 октября 2017 г.*

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М., Рукавишников А.С. Математическое и компьютерное моделирование манипуляторов с нелинейной геометрической связью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1757>

**Красинский Александр Яковлевич** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Физико-математических дисциплин» МГУПП, профессор кафедры «Теория вероятности» МАИ. Автор более чем 150 работ по аналитической механике, нелинейной теории устойчивости и стабилизации при неполной информации о состоянии, математическому и компьютерному моделированию динамики мехатронных систем. e-mail: krasinsk@mail.ru

**Ильина Анастасия Николаевна** — ст. преподаватель кафедры «Теория вероятности» МАИ. Область научных интересов: математическое и компьютерное моделирование голономных систем с нелинейными геометрическими связями (манипуляторов). e-mail: happyday@list.ru

**Красинская Эсфира Мустафовна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 55 научных работ в области аналитической механики, нелинейной теории устойчивости и стабилизации стационарных движений голономных и неголономных механических систем. e-mail: krasinsk@mail.ru

**Рукавишникова Анастасия Сергеевна** — студентка Московского физико-технического института, сотрудник ООО «САУНО». Область научных интересов: робототехника, программирование, математическое и компьютерное моделирование голономных систем с нелинейными геометрическими связями (манипуляторов). e-mail: nasty.ruka@mail.ru

## Mathematical and computer simulation of manipulators with nonlinear geometric constraint

© A.Ya. Krasinsky<sup>1</sup>, A.N. Ilyina<sup>2</sup>, E.M. Krasinskaya<sup>3</sup>,  
A.S. Rukavishnikova<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University of Food Production, Moscow, 125080, Russia

<sup>2</sup>Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993, Russia

<sup>3</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>4</sup>SAUNO LLC, Moscow, 109651, Russia

*The article describes mathematical models and solution of stabilization problems of stationary motions for two manipulators with excessive coordinate and nonlinear geometric constraint in the electric drive: a rotating manipulator and a four-wheel mobile manipulator with elastic suspension. The method used here was developed earlier for holonomic and nonholonomic systems with differential constraints using the theory of critical (special) Lyapunov cases in the nonlinear stability theory. The dynamics of the mechanical part of the manipulators is described using equations in the form developed by M.F. Shulgin for systems with redundant coordinates that do not contain joining factor. The voltage at the armature winding of the actuating electric motor is used for control. The second Kirchhoff's law describes the dynamics equation of the motor. The closed system is a system of indirect control. The control law is determined by solution of the linear-quadratic stabilization problem by the Krasovsky method for an isolated subsystem that does not include the critical variable corresponding to the zero root. Coefficients of controlling actions were found by solving the matrix algebraic Riccati equation using programs developed in the MATLAB system and taking into account the conditions imposed by the geometric constraint on the coordinate perturbations.*

**Keywords:** *geometric constraints, redundant coordinates, Shulgin equations, stabilization, stationary motion, manipulator*

### REFERENCES

- [1] Zenkevich S.L., Yuschenko A.S. *Osnovy upravleniya manipulyatsionnymi robotami* [Principles of robotic manipulator control]. Moscow, BMSTU Publ., 2004, 480 p.
- [2] Vukobratovic M., Stokic D., Kircanski N. *Non-Adaptive and Adaptive Control of Manipulation Robots*. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag Publ., 1985 [In Russ.: Vukobratovic M., Stokic D., Kircanski N. Neadaptivnoe i adaptivnoe upravlenie manipulyatsionnymi robotami. Moscow, Mir Publ., 1989, 376 p.].
- [3] Matukhin V.I. *Upravlenie mekhanicheskimi sistemami* [Control of mechanical systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 320 p.
- [4] Lurye A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 824 p.
- [5] Routh E.J. *Dynamics of a system of rigid bodies*. London, MacMillan and Co. Publ., 1891 [In Russ.: Routh E.J. Dinamika sistemy tverdykh tel]. Moscow, Nauka Publ., 1983, vol. 2, 544 p.].
- [6] Min-Sung Koo, Ho-Lim Choi, Jong-Tae Lim. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2012, vol. 8, no. 9, pp. 5999–6009.
- [7] Krasinsky A.Ya., Krasinskaya E.M. O dopustimosti linearizatsii uravneniy geometricheskikh svyazey v zadachakh ustoychivosti i stabilizatsii ravnovesiy [On

- the admissibility of the linearization of the equations of geometric constraints in problems of stability and stabilization of equilibria]. In: *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey. Teoreticheskaya mekhanika. Vyp. 29* [Collection of scientific and methodical articles. Theory of Mechanics. Issue 29]. Samsonov V.A., ed. Moscow, MGU Publ., 2015, pp. 54–65.
- [8] Shulgin M.F. O nekotorykh differentsialnykh uravneniyakh analiticheskoy dinamiki i ikh integrirovanii [On some differential equations of analytic dynamics and their integration]. In: *Trudy. Novaya seriya. Vyp. 144: Fiziko-matematicheskie nauki. Kn. 18* [Proceedings. New series. Issue 144: Physics and Mathematics. Book 18]. Tashkent, SAGU Publ., 1958, 183 p.
- [9] Neimark Yu.I., Fufayev N.A. *Dinamika negolonomnykh system* [Dynamics of non-holonomic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 519 p.
- [10] Krasinskaya E.M., Krasinsky A.Ya., Obnosov K.B. O razvitii nauchnykh metodov shkoly M.F. Shulgina v primenenii k zadacham ustoychivosti i stabilizatsii mekhatronnykh system s izbytochnymi koordinatami [On the development of scientific methods of the M.F. Shulgin's school applied to problems of stability and stabilization of equilibria of mechatronic systems with redundant coordinates]. In: *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey. Teoreticheskaya mekhanika. Vyp. 28* [Collection of scientific and methodical articles. Theory of mechanics. Issue 28]. Samsonov V.A., ed. Moscow, MGU Publ., 2012, pp. 169–184.
- [11] Krasinskaya E.M., Krasinsky A.Ya. *Nauka i obrazovanie: elektronnyy nauchno-tekhnicheskii zhurnal — Science and Education: Electronic Scientific and technical Journal*, 2013, no. 3. DOI: 10.7463/0313.0541146
- [12] Lyapunov A.M. *Sobranie sochineniy. V 6 tomakh* [Collected works. In 6 volumes]. Moscow, Leningrad, USSR Academy of Sciences Publ., 1956, vol. 2, 472 p.
- [13] Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [Theory of motion stability]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 530 p.
- [14] Krasinskaya-Tumeneva E.M., Krasinsky A.Ya. O vliyaniy struktury sil na ustoychivost polozheniy ravnovesiya negolonomnykh system [On the influence of the structure of forces on the stability of nonholonomic system equilibrium positions]. In: *Sbornik trudov "Voprosy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki"* [Problems of computational and applied mathematics. Collection of works]. Tashkent, 1977, no. 45, pp. 172–186.
- [15] Krasinskaya E.M. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1983, vol. 47, no. 2, pp. 302–309.
- [16] Krasinsky A.Ya. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, vol. 52, no. 2, pp. 194–202.
- [17] Krasinsky A.Ya. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, vol. 56, no. 6, pp. 939–950.
- [18] Krasinsky A.Ya. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2004, no. 1, pp. 97–103.
- [19] Krasinskaya E.M., Krasinsky A.Ya. Ob odnom metode issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii ustanovivshikhsya dvizheniy mekhanicheskikh system s izbytochnymi koordinatami [On a method of researching the stability and stabilization of steady motions of mechanical systems with redundant coordinates]. *Trudy XII Vserossiyskogo soveshaniya po problemam upravleniya. Moskva, 16–19 iyunya 2014 g.* [Proceedings of the XII National conference on problems of control. Moscow, June 16–19, 2014]. Moscow, Institut problem upravleniya RAN Publ., 2014, pp. 1766–1778.
- [20] Krasinskiy A.Ya., Krasinskaya E.M. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2016, no. 8, pp. 85–100.

- [21] Krasinskiy A.Ya., Krasinkaya E.M., Ilyina A.N. *International Robotics and Automation Journal*, 2017, vol. 2, no. 1. DOI: 10.15406/iratj.2017.02.00007
- [22] Aizerman M.A., Gantmacher F.R. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1957, Bd. 37, No. 1/2, S. 74–75. DOI: 10.1002/zamm.19570370112
- [23] Rumyantsev V.V. *Ob ustoychivosti statsionarnykh dvizheniy sputnikov* [On the stability of satellite stationary motions]. Moscow, VTs AN USSR Publ., 1967, 155 p.

**Krasinsky A.Ya.**, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Physics and Mathematics, Moscow State University of Food Production, Professor, Department of Theory of Probability, Moscow Aviation Institute. Author of over 150 research publications in the field of analytical mechanics, nonlinear theory of stability and stabilization with incomplete information about the state, mathematical and computer simulation of the mechatronic system dynamics. e-mail: krasinsk@mail.ru

**Ilyina A.N.**, Senior Lecturer, Department of Theory of Probability, Moscow Aviation Institute. Research interests: mathematical and computer simulation of holonomic systems with nonlinear geometric connections (manipulators). e-mail: happyday@list.ru

**Krasinkaya E.M.** (1969), Cand. Sc. (Phys.-Math.) Assoc. Professor of the Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University Author of more than 55 scientific papers in the field of analytical mechanics, nonlinear theory of stability and stabilization of steady motions of holonomic and non-holonomic mechanical systems. e-mail: krasinsk@mail.ru

**Rukavishnikova A.S.** graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 2017. Research interests: robotics, programming, mathematical and computer modeling of holonomic systems with nonlinear geometric constraints (manipulators). e-mail: nasty.ruka@mail.ru