

## Учет высших тонов колебаний при вычислении чувствительности собственных форм колебаний к вариациям параметров механической системы

© О.Д. Бацева, С.Н. Дмитриев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложен способ вычисления производных от собственных чисел и векторов в симметричной обобщенной проблеме собственных значений по параметрам механической системы. Для вычисления производных от собственных форм применено разложение в ряд по собственным формам колебаний. Исследована сходимость этих рядов. Показано, что число членов ряда для достижения приемлемой точности (в 1 %) оказывается достаточно большим. Из анализа коэффициентов ряда найдены формулы приближенного учета суммы всех отброшенных членов. Для этого требуется решить вспомогательную задачу о статическом нагружении механической системы некоторым вектором сил, поэтому поправка названа статической. Учет ее позволяет радикально снизить число членов ряда, обеспечивая приемлемую точность.*

**Ключевые слова:** частоты колебаний, формы колебаний, обобщенная проблема собственных значений, метод конечных элементов, чувствительность, жесткости, массы, разложение в ряд, сходимость ряда

**Введение.** Одной из задач динамики конструкций является определение чувствительности собственных частот, форм колебаний к вариациям проектных параметров [1–13]. Под функциями чувствительности понимают производные от собственных частот и форм колебаний по проектным параметрам. Знание производных позволяет «управлять» значениями частот и форм колебаний, изменяя значения параметров конструкции, к которым данная частота или форма колебаний наиболее чувствительна. Теория чувствительности находит применение при решении задач оптимального проектирования [1, 6, 8, 10], статистической динамики, в том числе нелинейных [4, 5], при верификации конечно-элементных моделей на основе результатов резонансных испытаний [9, 13]. Производные по проектным параметрам определяются как для математических моделей упругих систем с распределенными параметрами, так и для конечно-элементных моделей, в которых учитывается конечное число степеней свободы. При использовании метода конечных элементов (МКЭ) задача определения частот и форм колебаний сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений с действительными положительными симметричными матрицами [14]:

$$-\lambda_j M \varphi_j + K \varphi_j = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda_j$  — собственное число;  $M$  — матрица массы размером  $n \times n$ ;  $\varphi_j$  — собственный вектор,  $j=1, \dots, n$  — номер тона колебаний;  $n$  — число степеней свободы системы, определенное при формировании конечно-элементной модели;  $K$  — матрица жесткости размером  $n \times n$ .

Функции чувствительности представляют собой производные  $\lambda_j$  и  $\varphi_j$  по проектным параметрам (жесткостным, инерционным и геометрическим характеристикам конечно-элементной модели). Функции чувствительности первого порядка (первые производные) находят либо путем непосредственного дифференцирования уравнения (1), либо применяя метод разложения собственных чисел и векторов в ряд по малому параметру [15]. Возможно также применение метода конечных разностей. Производные для стандартной проблемы собственных значений впервые были найдены Б.С. Якоби в 1846 г. [2]. Для производных в обобщенной проблеме собственных значений с симметричными матрицами часто применяется метод, предложенный Р.Л. Фоксом и М.П. Капуром в 1968 г. [3], в котором для определения производных от собственных векторов по проектным параметрам используется разложение по собственным формам колебаний. В работе [9] этот метод распространен на системы с демпфированием, пропорциональным скорости. Алгоритм Фокса и Капура достаточно прост в реализации, приводит к некоторым аналитическим выражениям; в отличие от других методов [2, 4, 8, 11] не требуется применение каких-либо сложных вычислительных процедур, подбор шага и многократное решение задачи на собственные значения. Существенный недостаток — это его погрешность отбрасывания части тонов колебаний, неизбежная при использовании больших конечно-элементных моделей.

В настоящей статье предлагается уточненная формула для производной от собственного вектора, выведенная путем приближенного учета вклада отброшенных высших тонов колебаний.

**Формулы для вычисления производных собственных чисел и векторов в обобщенной проблеме собственных значений.** Следуя работе [3], приведем основные соотношения для вычисления производных в обобщенной проблеме собственных значений (1). При выводе формул будем предполагать, что собственные числа и собственные векторы, найденные путем решения обобщенной проблемы (1), собраны в диагональную матрицу собственных чисел  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  и матрицу форм  $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ , в которой формы колебаний

располагаются по столбцам. Будем также считать, что собственные числа и собственные векторы удовлетворяют соотношениям  $K$ - и  $M$ -ортогональности [14, 16]:

$$\begin{aligned}\Phi^T K \Phi &= \Lambda, \\ \Phi^T M \Phi &= E,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $E$  — единичная матрица.

Пусть  $x$  — некоторый проектный параметр (жесткость, масса или геометрический размер). Найдем производные  $j$ -го собственного числа и соответствующего ему вектора по этому параметру. Продифференцируем уравнение обобщенной проблемы собственных значений (1) по  $x$ :

$$-\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} M \varphi_j + \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j + (-\lambda_j M + K) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0.\tag{3}$$

Вначале определим производную собственного числа по проектному параметру. Для этого умножим результат дифференцирования слева на  $\varphi_j^T$  и разрешим полученное выражение относительно  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$ , при этом учтем, что в силу соотношения ортогональности (2)  $\varphi_j^T M \varphi_j = 1$ , поэтому

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} = \varphi_j^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j + \varphi_j^T (-\lambda_j M + K) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}.\tag{4}$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (4) равно нулю, так как множитель, стоящий перед производной  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$ , будет нулевой строкой — он представляет собой транспонированное уравнение обобщенной проблемы собственных значений (1). После отбрасывания этого слагаемого получаем формулу для производной собственного числа по проектному параметру

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} = \varphi_j^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j.\tag{5}$$

Найдем производную формы колебаний по проектному параметру  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$ . Обратимся к формуле (3) — результату дифференцирования уравнения обобщенной проблемы собственных значений. Для этой производной получается система уравнений с вырожденной матрицей:

$$(-\lambda_j M + K) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} M \varphi_j - \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j. \quad (6)$$

Можно получить ответ в виде формулы, если представить вектор  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$  в виде линейной комбинации собственных форм колебаний:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \Phi A = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (7)$$

где  $A = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]^T$  — вектор коэффициентов разложения.

Подставим  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$  в виде суммы (7) в соотношение (6) и умножим его слева на  $\Phi^T$ . В силу наличия соотношений  $K$ - и  $M$ -ортogonalности в левой части получается диагональная матрица  $(\Lambda - \lambda_j E)$ , а произведение  $\Phi^T M \varphi_j$  представляет собой вектор, у которого только одна компонента с номером  $j$  равна единице, а остальные равны нулю:

$$(\Lambda - \lambda_j E) A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \Phi^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j. \quad (8)$$

Таким образом, для компонент  $a_i$  вектора  $A$  при  $i \neq j$  получаем:

$$a_i = \frac{\varphi_i^T \left( \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j}{\lambda_i - \lambda_j}. \quad (9)$$

Из формулы (9) нельзя определить коэффициент  $a_j$ , поскольку при  $i = j$  правая часть  $\lambda_j - \lambda_j = 0$  и левая часть уравнения также обращаются в нуль:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} - \varphi_j^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j = 0.$$

Поэтому имеется неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Коэффициент  $a_j$  можно определить, если использовать условие нормирования  $j$ -й формы колебаний по массе (2):

$$\Phi_j^T M \Phi_j = 1. \quad (10)$$

Дифференцируя равенство (10) по проектному параметру  $x$ , получаем

$$\frac{\partial \Phi_j^T}{\partial x} M \Phi_j + \Phi_j^T \frac{\partial M}{\partial x} \Phi_j + \Phi_j^T M \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Слагаемые, входящие в это выражение, являются скалярами, поэтому первое и третье слагаемое равны. Следовательно, можно записать

$$2\Phi_j^T M \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = -\Phi_j^T \frac{\partial M}{\partial x} \Phi_j. \quad (12)$$

Подставим в (12)  $\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = \Phi A$ :

$$2\Phi_j^T M \Phi A = -\Phi_j^T \frac{\partial M}{\partial x} \Phi_j. \quad (13)$$

В силу наличия соотношения  $M$ -ортогональности произведение  $\Phi^T M \Phi_j$  дает вектор с одной ненулевой  $j$ -й компонентой, которая равна единице. Следовательно,

$$a_j = -\frac{\Phi_j^T \frac{\partial M}{\partial x} \Phi_j}{2}. \quad (14)$$

Таким образом, все коэффициенты разложения производной в ряд по собственным формам колебаний оказываются определенными.

**Уточняющая поправка в формуле для вычисления производной собственного вектора.** Производная собственного числа  $\lambda_j$  по проектному параметру  $x$  вычисляется по формуле (5), не требующей каких-либо уточнений. Для вычисления производной собственного вектора  $\Phi_j$  нужно последовательно применить формулы (14), (9) и (7). По формуле (7) производная  $\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}$  представлена линейной комбинацией собственных векторов. Поскольку при проведении расчетов с

использованием больших конечно-элементных моделей фактически определяются не все  $n$  собственных векторов  $\varphi_j$ , а только их небольшая часть  $m < n$ , неизбежно усечение суммы в формуле (12), вносящее некоторую погрешность:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \Phi A = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \approx \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j. \quad (15)$$

Как отмечается, «чувствительности для собственных форм требуют знания всех тонов, имеющаяся модальная модель содержит ограниченный их набор. Поэтому чувствительности собственных форм будут менее точными» [9, с. 130]. Такая ситуация складывается и в других случаях применения метода разложения по тонам колебаний [17, 18]. Для учета вклада отброшенных слагаемых используем неравенство, которое имеет место при  $i \gg m$  и  $j < m$ :

$$\lambda_i \gg \lambda_j. \quad (16)$$

В левой части формулы (8), определяющей коэффициенты разложения производной  $j$ -го собственного вектора в ряд по формам колебаний, стоит диагональная матрица, на диагонали которой находятся разности собственных чисел:

$$\begin{aligned} & (\Lambda - \lambda_j E) = \\ & = \text{diag}(\lambda_1 - \lambda_j, \lambda_2 - \lambda_j, \lambda_3 - \lambda_j, \dots, \lambda_m - \lambda_j, \dots, \lambda_i - \lambda_j, \dots, \lambda_n - \lambda_j). \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом неравенства (16) матрицу (17) можно приближенно представить в виде

$$(\Lambda - \lambda_j E) = \text{diag}(\lambda_1 - \lambda_j, \lambda_2 - \lambda_j, \lambda_3 - \lambda_j, \dots, \lambda_m - \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n). \quad (18)$$

Таким образом, для тонов колебаний, найденных и учтенных в сумме выражения (15), коэффициенты  $a_j$  можно определить из решения системы уравнений (8), а для отброшенных тонов колебаний будет справедливо приближенное уравнение (19):

$$\Lambda A_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \Phi^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j. \quad (19)$$

В отличие от вектора  $A$  решения системы (8), вектор решения системы (19) обозначен как  $A_0 = [a_{01}, a_{02}, a_{03}, \dots, a_{0n}]^T$ . Поскольку матрица  $\Lambda$  — диагональная и среди высших частот колебаний, очевидно, нет нулевых, можно решение системы (19) записать в виде

$$A_0 = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda^{-1} \Phi^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j. \quad (20)$$

Если в формулу (7), определяющую вектор производной  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$  в виде суммы, вместо  $A$  подставить  $A_0$ , то получаем некоторый вектор  $\psi_j$ :

$$\psi_j = \Phi \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j. \quad (21)$$

В правую часть формулы (21) входят собственные числа и векторы для высших отброшенных тонов колебаний, поэтому вектор  $\psi_j$  непосредственно по формуле (21) вычислить нельзя. Отметим также, что вектор  $\psi_j$  не может рассматриваться как некоторое приближение к производной от  $j$ -го собственного вектора  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$ , так как коэффициенты  $a_{0i}$  для низших, учтенных тонов колебаний были найдены из уравнения (19), а не из уравнения (8). Однако можно указать процедуру вычисления вектора  $\psi_j$  и дальнейшего использования его для уточнения производной  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$ . Рассмотрим последовательно слагаемые, входящие в правую часть уравнения (21). Первое слагаемое  $\psi_{j1}$  содержит в качестве сомножителя вектор, имеющий только одну ненулевую компоненту, поэтому его можно переписать в виде

$$\Psi_{j1} = \Phi \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \varphi_j. \quad (22)$$

В число найденных собственных чисел и векторов входят  $\lambda_j$  и  $\varphi_j$ , поскольку очевидно, что  $j < m$ , а отношение  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$  вычислено ранее по формуле (5), т. е. вектор  $\Psi_{j1}$ , стоящий в левой части уравнения (22), можно вычислить. При рассмотрении второго слагаемого  $\Psi_{j2}$  отметим, что произведение матриц  $\Phi \Lambda^{-1} \Phi^T$  в левой части уравнения (21) является представлением матрицы податливостей  $G$ :

$$G = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T. \quad (23)$$

Действительно, матрицы жесткости  $K$  и податливости  $G$  взаимно обратные  $G = K^{-1}$ , а из соотношения  $K$ -ортогональности (2) следует, что  $K^{-1} = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T$ . Уравнение, определяющее вектор  $\Psi_{j2}$ , записываем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{j2} &= \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T \left( \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j = \\ &= G \left( \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j = K^{-1} \left( \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j. \end{aligned} \quad (24)$$

Из выражения (24) следует, что вектор  $\Psi_{j2}$  представляет собой решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$K \Psi_{j2} = \left( \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) \varphi_j. \quad (25)$$

Вектор правой части уравнения (25) и матрица жесткости  $K$  известны. Таким образом,

$$\Psi_j = \Psi_{j1} + \Psi_{j2}, \quad (26)$$

т. е. вектор  $\Psi_j$  оказывается полностью определенным. При наличии в спектре нулевых частот (соответствующих перемещениям системы как жесткого целого) матрица жесткости  $K$  будет вырожденной. По-



правку (26) можно найти и в этом случае, для чего потребуется применение некоторой специальной процедуры [17] (в работе [17] она названа процедурой Мак-Нила).

Вектор  $\psi_j$  можно представить так же, как и производную  $\frac{\partial \phi_j}{\partial x}$ , в виде линейной комбинации собственных форм колебаний:

$$\psi_j = \Phi A_0 = \sum_{i=1}^n a_{0i} \phi_i. \quad (27)$$

Сумму выражения (27) разделим на две части, содержащие, соответственно, найденные собственные векторы  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  и неизвестные  $i = m + 1, \dots, n$ :

$$\psi_j = \sum_{i=1}^m a_{0i} + \sum_{i=m+1}^n a_{0i} \phi_i. \quad (28)$$

Второе слагаемое в виде суммы служит уточняющей поправкой для вычисления производной собственного вектора  $\phi_j$ . Для поправки из вектора  $\psi_j$  вычтем сумму — первое слагаемое выражения (28). Из формулы (20) определим коэффициенты  $a_{0i}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ , кроме  $i = j$ :

$$a_{0i} = \frac{1}{\lambda_i} \phi_i^T \left( \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) \phi_j, \quad (29)$$

при  $i = j$ :

$$a_{0j} = \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} - \phi_j^T \left( -\lambda_j \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) \phi_j \right) = 0. \quad (30)$$

По формуле (28) находим как поправку вектор  $\psi_{0j}$ :

$$\psi_{0j} = \psi_j - \sum_{i=1}^m a_{0i} \phi_i \quad (31)$$

и прибавляем к значению производной, найденной по формуле (15):

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \approx \sum_{j=1}^m a_j \phi_j + \psi_{0j}. \quad (32)$$

Таким образом, по формуле (32) вклад отброшенных тонов колебаний учитывается интегрально с помощью вектора  $\psi_{0j}$ . Для определения поправки требуется решить вспомогательную задачу (25), ко-

торая по своей формулировке в терминах МКЭ является линейной задачей статики. Поэтому в дальнейшем поправку  $\psi_{0j}$  будем называть статической.

**Пример расчета производных собственных векторов.** Для иллюстрации полученных зависимостей рассмотрим простейший пример — конечно-элементную модель стержня, свободного на правом конце и закрепленного с помощью пружины на левом (рис. 1). На свободном правом конце закреплена дополнительная сосредоточенная масса. Жесткость пружины и сосредоточенную массу рассматриваем как варьируемые параметры.

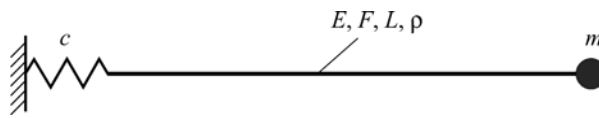


Рис. 1. Упругозакрепленный стержень

В расчете учтено  $n = 100$  степеней свободы, использована конечно-элементная модель с согласованной матрицей массы. Число степеней свободы невелико, поэтому легко найти все 100 собственных чисел и векторов, так что учесть все  $n$  слагаемых в формуле (15) не представляет трудностей. Решение, полученное при удержании всех 100 слагаемых суммы (7), рассмотрим как точное. Производная от матрицы жесткости системы по жесткости  $x = c$  пружины будет представлять собой матрицу размером  $100 \times 100$ , причем только один ее коэффициент равен единице —  $\left(\frac{\partial K}{\partial x}\right)_{1,1} = 1$ , а все остальные равны

нулю. Производная от матрицы массы системы по сосредоточенной массе  $x = m$  на правом конце также представляет собой матрицу размером  $100 \times 100$  и ненулевым является только один коэффициент:

$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{n,n} = 1$ . Жесткость пружины и масса на свободном конце — это

не связанные один с другим параметры, поэтому расчеты следует проводить отдельно для жесткости и отдельно для массы. Для определенности примем следующие параметры стержня:

Модуль упругости материала $E$ , Па .....	$2 \cdot 10^{11}$
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> .....	7800
Площадь поперечного сечения $F$ , м <sup>2</sup> .....	$10^{-4}$
Длина стержня $l$ , м .....	1
Жесткость пружины $c$ , Н/м .....	$10^9$
Сосредоточенная масса $m$ , кг .....	0,1

При проверке выведенных формул были рассмотрены производные от первых пяти собственных чисел и собственных форм колебаний. Для контроля точности полученных результатов проводились проверки. Собственные угловые частоты стержня были сверены с аналитическими значениями [16] (жесткость пружины увеличивалась при этом на пять порядков, а сосредоточенная масса на правом конце стержня обнулялась). Наблюдалось совпадение в трех значащих цифрах. Для всех 100 найденных собственных чисел и собственных векторов проверялось фактическое выполнение соотношений  $K$ - и  $M$ -ортогональности (2). При этом определена погрешность обращения в нуль внедиагональных коэффициентов матриц, полученную невязку сравнивали с суммой диагональных коэффициентов. Проверено также обращение в нуль поправки по формуле (31) при учете в сумме всех 100 слагаемых. Для векторов в качестве меры погрешности использовано отношение евклидовой нормы вектора невязки к евклидовой норме вектора соответствующей производной. Относительные погрешности во всех расчетах не превышали  $10^{-11}$ . Таким образом, данная задача и точность ее решения являются приемлемыми для анализа погрешностей вычисления производных и оценки влияния статической поправки.

Производные от форм колебаний представляют собой векторы. Производные были рассчитаны по формуле (7) с удержанием всех 100 слагаемых суммы. В дальнейшем они рассматривались как точные, а приближенные решения сравнивались с ними. Для сопоставления приведем первые пять форм колебаний стержня (рис. 2). Собственные числа  $c^{-2}$  для этих тонов имеют вид:

Тон 1.....	$5,19 \cdot 10^7$
Тон 2.....	$4,69 \cdot 10^8$
Тон 3.....	$1,31 \cdot 10^9$
Тон 4.....	$2,59 \cdot 10^9$
Тон 5.....	$4,32 \cdot 10^9$

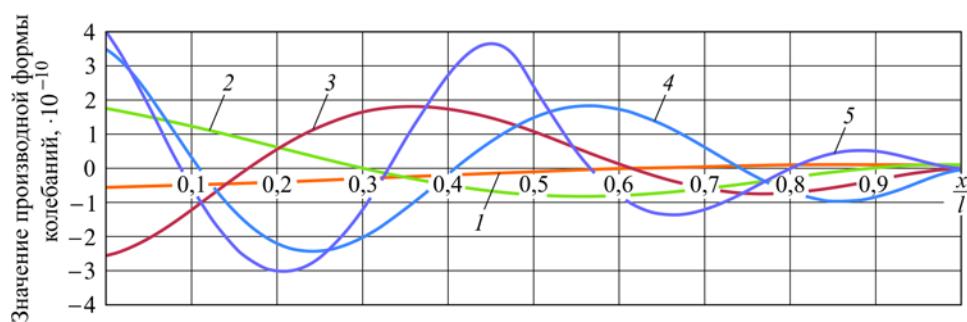


Рис. 2. Формы колебаний стержня, нормированные по матрице массы. Здесь и на рис. 3–10:

1–5 — первые пять тонов колебаний

По данным на рис. 3 видно, что жесткость пружины сильнее всего влияет на форму колебаний на левом конце стержня, где эта пружина и установлена, напротив, влияние массы на форму колебаний в этой точке близко к нулю (рис. 4).

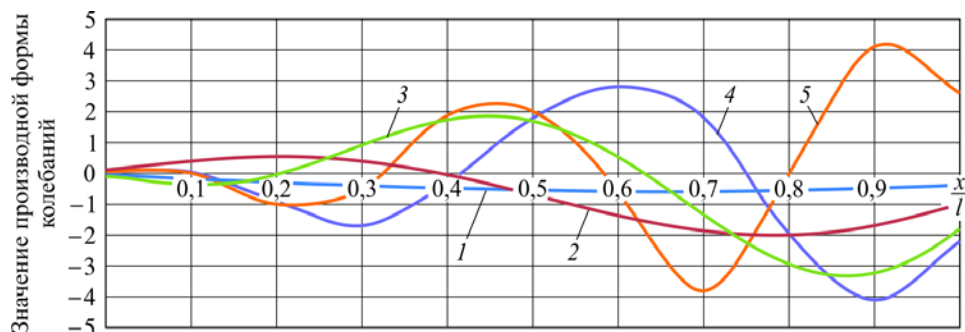


Рис. 3. Производные собственных форм колебаний по жесткости пружины для первых пяти тонов колебаний

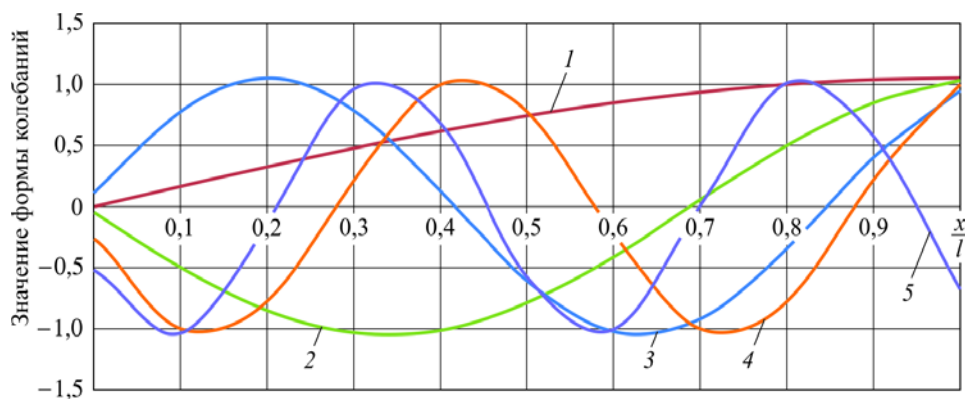
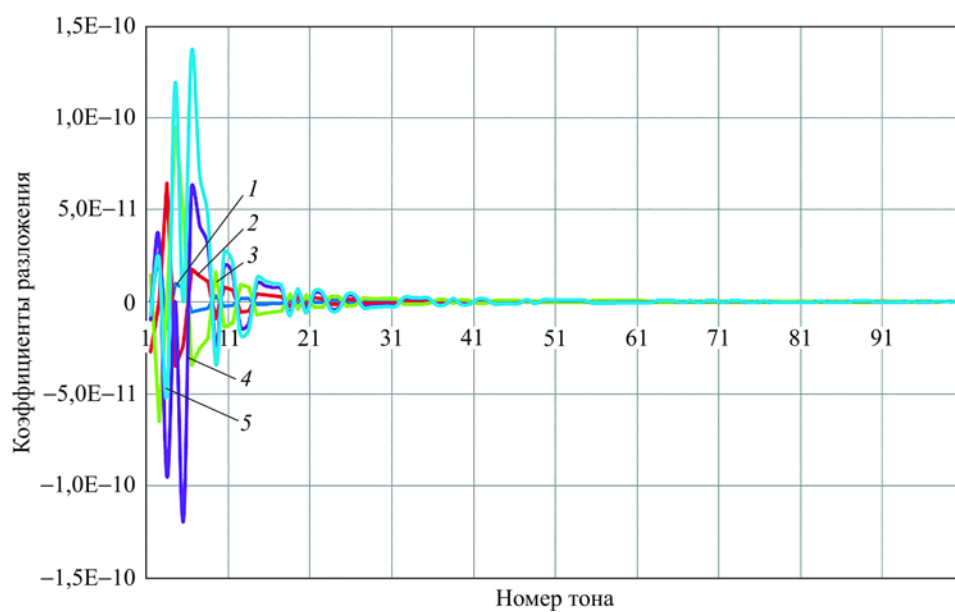
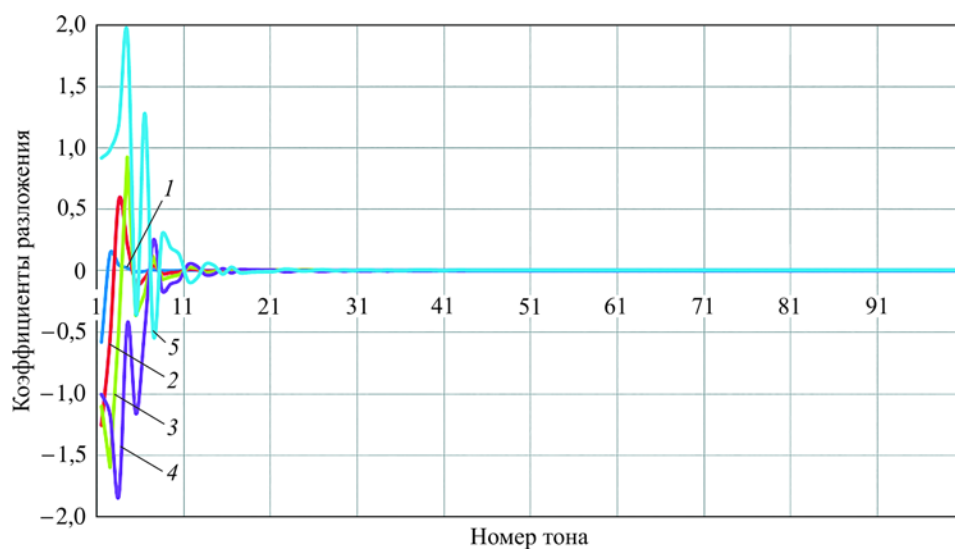


Рис. 4. Производные от собственных форм колебаний по массе для первых пяти тонов колебаний

**Исследование сходимости разложения по тонам для производных собственных векторов.** Расчеты значений коэффициентов разложения по тонам колебаний по формулам (9) и (14) показывают, что коэффициенты разложения являются знакопеременными. Причем, сравнивая данные на рис. 5 и 6, можно заметить, что абсолютные значения коэффициентов разложения по собственным формам колебаний производной по массе (см. рис. 6) убывают значительно быстрее, чем коэффициенты разложения производной по жесткости (см. рис. 5).



**Рис. 5.** Зависимость коэффициентов разложения по тонам колебаний производных по жесткости от номера тона для первых пяти тонов колебаний



**Рис. 6.** Зависимость коэффициентов разложения по тонам колебаний производных по массе от номера тона для первых пяти тонов колебаний

Из приведенных на рис. 7 и 8 графиков видно, что погрешность, связанная с отбрасыванием части слагаемых, достаточно заметна, особенно это касается производных собственных форм по жесткости пружины, где погрешность в 1 % для производной от первой формы

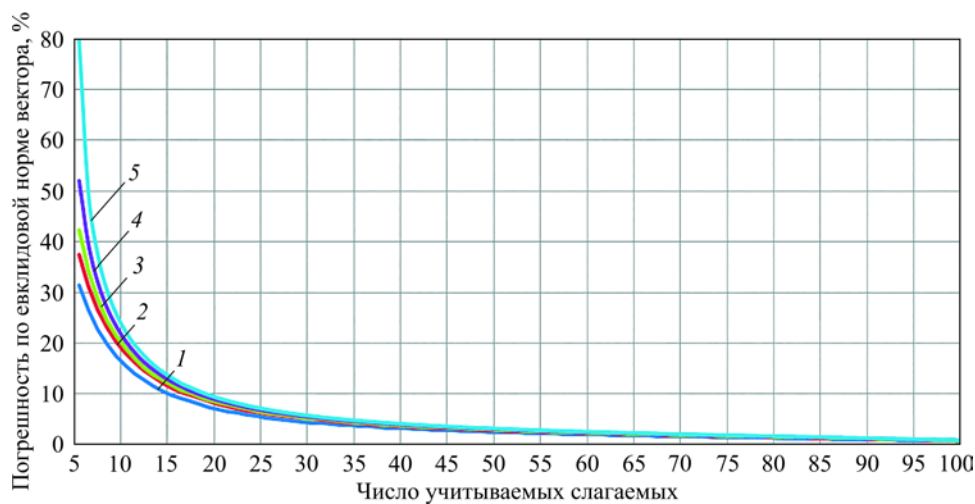


Рис. 7. Зависимость погрешности вычисления производных по жесткости от числа учитываемых слагаемых

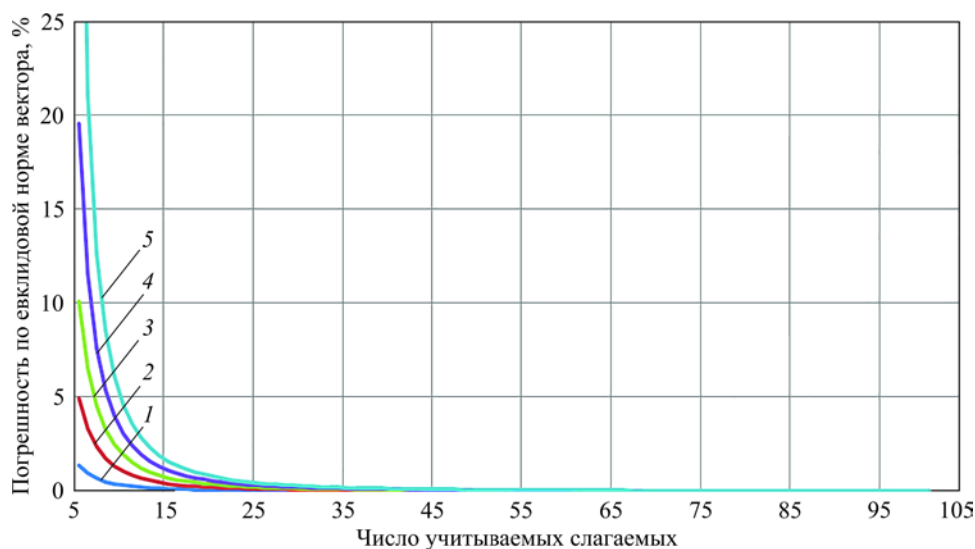


Рис. 8. Зависимость погрешности вычисления производных по массе от числа учитываемых слагаемых

колебаний достигается при удержании 85 слагаемых. Чтобы достичь такой точности для тона 1, нужно удержать 92 слагаемых. Производные по массе вычисляются с существенно меньшей погрешностью. По тону 1 для погрешности в 1 % достаточно семи слагаемых, по тону 5 — 18. В целом отмечаемой скорости сходимости явно недостаточно, особенно при вычислении производной по жесткости.

**Расчет производных форм колебаний с учетом статической поправки.** Для вычисления с учетом статических поправок (рис. 9 и 10) нужно последовательно применить формулы (22), (25), (29)–(31), при этом погрешность снижается радикально.

Так, для производной тона 5 по жесткости для достижения точности в 1 % необходимо удержать 13 слагаемых (удержание первых пяти слагаемых обязательно). Для тона 1 уже пять слагаемых дают погрешность всего лишь 0,16 %. Для производной тона 5 колебаний по массе удержание десяти членов ряда дает погрешность 0,67 %, для тона 1 уже при пяти слагаемых погрешность пренебрежимо мала — 0,0096 %. Число слагаемых, необходимых для достижения приемлемой точности, снижается в несколько раз.

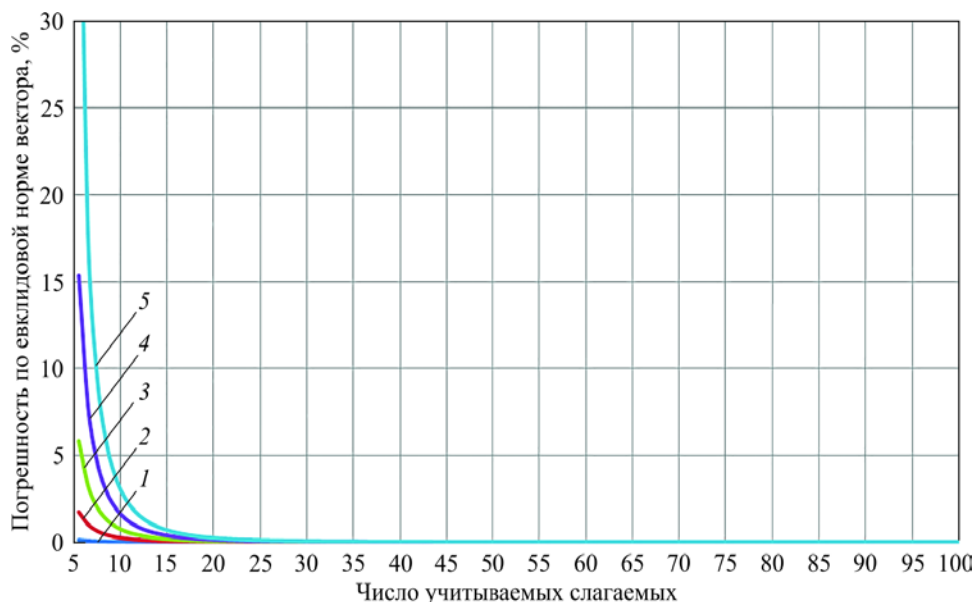
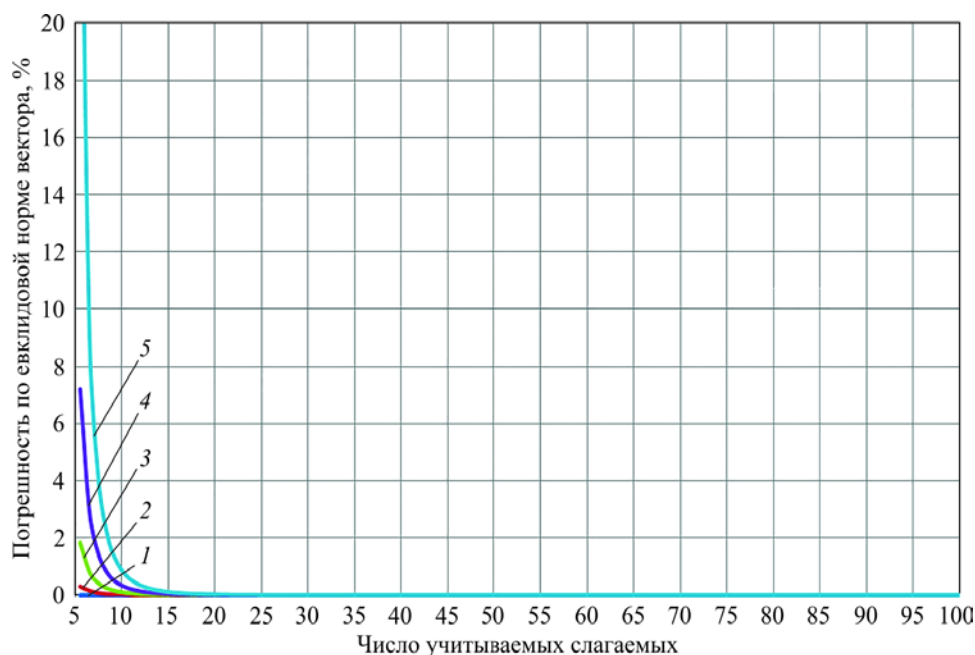


Рис. 9. Погрешность в определении производных собственных форм по жесткости при использовании статических поправок



**Рис. 10.** Погрешность в определении производных собственных форм по массе при использовании статических поправок

**Закключение.** В результате проведенного исследования сходимости метода Фокса и Капура при вычислении производных форм колебаний по проектным параметрам выявлено, что сходимость метода достаточно медленная, следовательно, точности вычисления производных методом разложения по собственным тонам колебаний при малом числе слагаемых недостаточно. Предложен и подтвержден численными расчетами способ приближенного учета вклада высших тонов колебаний в расчет производных форм колебаний, позволяющий радикально повысить точность вычислений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хог Э., Чой К., Комков В. *Анализ чувствительности при проектировании конструкций*. Москва, Мир, 1988, 428 с.
- [2] Аделман Г.М., Хафтка Р.Т. Анализ чувствительности при расчете дискретных моделей конструкций. *Аэрокосмическая техника*, 1986, № 12, с. 77–90.
- [3] Фокс Р.Л., Капур М.П. Скорость изменения собственных значений и собственных векторов. *Ракетная техника и космонавтика*, 1968, № 12, с. 227–230.



- [4] Тушев О.Н., Березовский А.В. Чувствительность собственных значений и векторов к вариациям параметров конечно-элементных моделей конструкции. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2007, № 1, с. 35–40.
- [5] Тушев О.Н., Березовский А.В. Определение спектральных плотностей динамических характеристик нелинейной модели конструкции. *Изв. РАН. Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 1, с. 18–27.
- [6] Бушуев А.Ю., Яковлев Д.О. О подходе к оптимизации упругих конструкций по частотным характеристикам. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер: Естественные науки*, 2011, спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 66–69.
- [7] Бушуев А.Ю. Функции чувствительности в задачах математического моделирования систем с распределенными параметрами. *Актуальные проблемы науки: ИГУМО и ИТ как исследовательский центр*, 2013, т. 2, № 1, с. 61–67.
- [8] *MSC NASTRAN 2012. Design sensitivity and Optimization. User's Guide*, MSC Software Corporation, 2011, 718 с.
- [9] Хейлен В., Ламменс С., Сас П. *Модальный анализ: теория и испытания*. Москва, ООО «Новатест», 2010, 319 с.
- [10] Болдырев А.В. *Оптимизация распределения материала в комбинированных авиационных конструкциях*. Дис. ... канд. техн. наук. Самара, СГАУ, 2005, 159 с.
- [11] Грабовский А.В., Ткачук Н.А., Танченко А.Ю., Ткачук Н.Н., Мазур И.В. Чувствительность собственных форм колебаний систем с несколькими степенями свободы к варьированию параметров динамической системы. *Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»*, Темат. вып. Транспортное машиностроение, 2015, № 43 (1152), с. 25–29.
- [12] Грабовский А.В. Определение чувствительности собственных частот и форм колебаний прямоугольной пластины к варьированию ее инерционно-жесткостных характеристик. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПИ», Сер. Нові рішення в сучасних технологях*, 2017, № 7 (1229), с. 39–48.
- [13] Пивоварова М.В., Бессчетнов В.А. Разработка расчетного метода определения оптимального размещения тензорезисторов и определение чувствительности форм колебаний. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника*, 2017, № 50, с. 5–14.
- [14] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975, 511 с.
- [15] Гробов В.А. *Теория колебаний механических систем*. Киев, Вища школа, 1982, 182 с.
- [16] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. *Теория колебаний*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 271 с.
- [17] Крейг мл., Чжан. Методы свободных границ для связывания субконструкций при исследовании динамики. *Ракетная техника и космонавтика*, 1976, т. 14, № 11, с. 154–155.
- [18] Лиходед А.И., Сидоров В.В. Некоторые особенности сходимости метода разложения по тонам колебаний применительно к континуальным и конечно-элементным моделям. *Космонавтика и ракетостроение*, 2013, № 2 (71), с. 20.

Статья поступила в редакцию 11.04.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Бацева О.Д., Дмитриев С.Н. Учет высших тонов колебаний при вычислении чувствительности собственных форм колебаний к вариациям параметров механической системы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-7-1785>

**Бацева Ольга Дмитриевна** — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер отделения тепловибропрочности АО «ВПК «НПО машиностроения». Область научных интересов: численные методы, оптимальное проектирование. e-mail: [olgabatseva@yahoo.com](mailto:olgabatseva@yahoo.com)

**Дмитриев Сергей Николаевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: динамика конструкций летательных аппаратов. e-mail: [dmitrievsn@mail.ru](mailto:dmitrievsn@mail.ru)

## Accounting the highest tones of oscillations when calculating the sensitivity of modes of their own to variations in the parameters of a mechanical system

© O.D. Batseva, S.N. Dmitriev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article proposes the method for calculating the derivatives of numbers of their own and eigenvectors in a symmetric generalized eigenvalue problem in parameters of a mechanical system. Expansion in series of modes of their own is applied to calculate the derivatives forms of their own. The convergence of these series is investigated. The paper shows that the number of terms of the series turns out to be quite large for achieving an acceptable accuracy (in 1%). Formulas for the approximate accounting of the sum of all discarded terms are found from the analysis of the coefficients of the series. The solution of the auxiliary problem of the statistic loading of a mechanical system by a certain force vector is required for this, therefore the correction is called static. Accounting for it allows us to drastically reduce the number of terms of the series, providing acceptable accuracy.*

**Keywords:** *frequency of vibration, vibration mode, generalized eigenvalue problem, final element method, sensitivity, hardness, mass, expansion in series, convergence of series*

### REFERENCES

- [1] Haug J.E., Kyung K.Ch., Komkov V. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 177. Academic Press INC., Orlando FL, 1986 [In Russ.: Haug J. E., Kyung K.Ch., Komkov V. Analiz chuvstvitelnosti pri proektirovanii konstruktsiy. Moscow, Mir Publ., 1998, 428 p.].
- [2] Adelman H.M., Haftka R.T. *Aerokosmicheskaya tekhnika — AIAA Journal: devoted to aerospace research and development*, 1986, no. 12, pp. 77–90.
- [3] Foks R.L., Kapur M.P. *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika — AIAA Journal: devoted to aerospace research and development*, 1968, no. 12, pp. 227–230.
- [4] Tushev O.N., Berezovskiy A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2007, no. 1, pp. 35–40.
- [5] Tushev O.N., Berezovskiy A.V. *Izv. RAN. Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, no. 1, pp. 18–27.
- [6] Bushuev A.Yu., Yakovlev D.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2011, Spec. iss. Mathematical Modeling, pp. 66–69.
- [7] Bushuev A.YU. *Funktsii chuvstvitelnosti v zadachakh matematicheskogo modelirovaniya sistem s raspredelennymi parametrami [Sensitivity functions in problems of mathematical modeling of systems with distributed parameters]. Aktualnye problemy nauki: IGUMO i IT kak issledovatel'skiy tsentr [Proc. Actual problems of science: IGUMO and IT as a research center]*. 2013, vol. 2, no. 1, pp. 61–67.
- [8] *MSC NASTRAN 2012. Design sensitivity and Optimization. User's Guide*, MSC Software Corporation, 2011, 718 p.

- [9] Heylen W., Lammens S., Sas P. *Modal Analysis Theory and Testing*. Katholieke Universiteit Leuven, 1997, 340 p. [In Russ.: Heylen W., Lammens S., Sas P. *Modalnyy analiz: teoriya i ispytaniya*. Moscow, Novatest Publ., 2010, 319 p.].
- [10] Boldyrev A.V. *Optimizatsiya raspredeleniya materiala v kombiniro-vannykh aviatsionnykh konstruksiyakh*. Dis. na soiskanie uchenoy stepeni kand. tekhn. nauk [Optimization of material distribution in combined aviation structures. Dis. eng. sc. diss.]. Samara, SGAU, 2005, 159 p.
- [11] Grabovskiy A.V., Tkachuk N.A., Tanchenko A.Yu., Tkachuk N.N., Mazur I.V. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KHPI", Temat. vyp. Transportnoe mashinostroenie (NTU "KhPI" Bulletin, Them. iss. Transport engineering)*, 2015, no. 43 (1152), pp. 25–29.
- [12] Grabovskiy A.V. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KHPI". Series Novi rishennya v suchasnikh tekhnologiyakh (NTU "KhPI" Bulletin)*, 2017, no. 7 (1229), pp. 39–48.
- [13] Pivovarova M.V., Besschetnov V.A. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika — PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2017, no. 50, pp. 5–14.
- [14] Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 511 p.
- [15] Grobov V.A. *Teoriya kolebaniy mekhanicheskikh system* [Theory of oscillations of mechanical systems]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1982, 182 p.
- [16] Ilin M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations]. Moscow, BMSTU Publ., 2003, p. 271.
- [17] Craig R., Chang C.-J. *AIAA Journal*, 1976, vol. 14, no. 11, pp. 1633–1635.
- [18] Likhoded A.I., Sidorov V.V. *Kosmonavtika i raketostroenie — Cosmonautics and rocket engineering*, 2013, no. 2 (71), p. 20.

**Batseva O.D.**, post-graduate student, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University, engineer of the department of thermal stability of JSC MIC Mashinostroenia. Research interests: numerical methods, optimal design.  
e-mail: olgabatseva@yahoo.com

**Dmitriev S.N.**, Cand. Sc. (Phys.-Math.) Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: dynamics of aircraft structures. e-mail: dmitrievsn@mail.ru