

## Колебательные процессы в электронной плазме с произвольной степенью вырождения

© Н.М. Гордеева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Проанализировано решение граничной задачи об отклике плазмы на внешнее электрическое поле. Рассмотрены колебания вырожденной электронной плазмы в слое конечной толщины. Для построения математической модели использованы кинетическое уравнение Власова — Больцмана с интегралом столкновений типа Бхатнагара — Гросса — Крука и уравнение Максвелла для электрического поля. Рассмотрен случай зеркального отражения электронов от поверхности плазмы. Общее решение граничной задачи (значение напряженности электрического поля) представлено в виде линейной комбинации дискретных решений с постоянными коэффициентами и интеграла по непрерывному спектру. Дискретные решения оказываются известными решениями Друде и Дебая, а непрерывный спектр соответствует волнам Ван Кампена. Показано, что существование моды Дебая зависит от таких параметров плазмы, как химический потенциал, частота внешнего электрического поля, частота столкновений в плазме. Область существования решения, соответствующего моде Дебая, определяется наличием комплексного корня дисперсионной функции, который находят, используя принцип аргумента.*

**Ключевые слова:** собственные функции, моды Друде, Дебая, Ван Кампена, электронная плазма, столкновительная плазма

Цель исследования — изучение характера экранирования (затухания) электромагнитного поля в тонком слое электронной плазмы в зависимости от химического потенциала среды и частоты внешнего поля. Необходимость в понимании характера экранирования возникает, например, при изучении распространения поверхностных плазменных колебаний, а также при рассмотрении действия электромагнитного поля на тонкий слой полупроводника.

В настоящей работе рассмотрена электронная плазма с частичным вырождением в тонком слое проводящей среды при зеркальных граничных условиях и перпендикулярности внешнего электрического поля поверхности плазмы. Использовано уравнение Власова с интегралом столкновений в  $\tau$ -приближении.

Задача о проникновении электрического поля в плазму впервые была рассмотрена Л.Д. Ландау [1], который в своем исследовании опирался на кинетическое уравнение, выведенное А.А. Власовым [2]. При этом в работе [1] изучен случай проникновения электрического поля в полупространство электронной бесстолкновительной плазмы. В этой же работе впервые было введено представление о бесстолкновительном затухании возмущений в плазме (затухание Ландау) и рас-

смотрена задача о колебаниях плазмы под действием электрического поля, направленного перпендикулярно поверхности раздела. Граничные условия на поверхности раздела при этом полагались чисто зеркальными. Для решения использовалось разложение в интеграл Фурье.

Известны труды, посвященные исследованию произвольной степени вырождения электронной плазмы — степени неклассичности [3]. Степень вырождения определяется как отношение химического потенциала к тепловой энергии. Коэффициенту степени вырождения, стремящемуся к  $-\infty$ , соответствует классическая (больцмановская, или максвелловская) плазма. Этот случай обычно реализуется в газовой плазме. Если коэффициент степени вырождения стремится к  $+\infty$ , то речь идет о полностью вырожденной плазме. Степень вырождения частично вырожденной плазмы равна отношению энергии Ферми к тепловой энергии электронов. Промежуточная степень вырождения характерна для электронно-дырочной плазмы полупроводников. Степень вырождения связана с плотностью плазмы. Невырожденная — это часто разреженная плазма, и по мере увеличения плотности плазмы возрастает и степень вырождения. Практически полная степень вырождения достигается для электронов в металле. В астрофизике полностью вырожденный электронный газ присутствует в белых карликах, а нейтронные звезды образуются из полностью вырожденного газа нейтронов.

Значительный практический интерес представляет проблема экранирования электрического поля, которая возникает в целом ряде задач микроэлектроники и оптики поверхности [4–7]. Поведение электрического поля вблизи поверхности плазмы существенно влияет на процесс распространения поверхностных плазменных колебаний [8, 9].

Задача о взаимодействии переменного электрического поля с плазменным слоем, перпендикулярно поверхности которого оно направлено, рассмотрена в работе [10], где также получено аналитическое решение задачи для полностью вырожденной электронной плазмы. Учет объемного рассеяния электронов проводился в рамках кинетической  $\tau$ -модели. Были рассмотрены зеркальные граничные условия рассеяния электронов на поверхности плазмы. При этом использовался метод разложения по собственным функциям. В дальнейшем такой подход был применен для анализа ряда задач об экранировании электрического поля вырожденной электронной плазмой [11–13].

В работе [14] описаны постановка и аналитическое решение задачи. Для постановки задачи используются  $\tau$ -модельное уравнение Власова — Больцмана и уравнение Максвелла для электромагнитного поля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{eq} - f), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = \int (f - f_0) d\Omega, \quad d\Omega = \frac{(2s+1)d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2)$$

Здесь  $e$  — заряд электрона;  $\mathbf{E}(x, t)$  и  $\mathbf{H}(x, t)$  — электрическое и магнитное поля внутри плазмы;  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс электрона;  $m$  — масса электрона;  $\nu$  — эффективная частота рассеяния электронов;  $f_{eq}$  — локально-равновесная функция распределения Ферми — Дирака,

$$f_{eq}(x, v, t) = \left\{ 1 + \exp \frac{\epsilon - \mu(x, t)}{kT} \right\}^{-1}; \quad \epsilon = mv^2/2 \text{ — кинетическая}$$

энергия электрона;  $\mu$  и  $\mu(x, t)$  — невозмущенный и возмущенный химические потенциалы соответственно;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура плазмы, которая в данной задаче считается постоянной;  $\rho$  — плотность заряда;  $f_0 = f_{FD}$  — абсолютная (невозмущенная) функция распределения Ферми — Дирака,

$$f_0(v, \mu) = f_{FD}(v, \mu) = \left\{ 1 + \exp \frac{\epsilon - \mu}{kT} \right\}^{-1}; \quad s \text{ — спин частиц, для электрона } s = 1/2; \quad \hbar \text{ — постоянная Планка.}$$

Внешнее электрическое поле вне плазмы перпендикулярно поверхности плазмы и изменяется по закону  $\mathbf{E}_{ext}(t) = E_0 e^{-i\omega t} (1, 0, 0)$ . Соответствующее самосогласованное электрическое поле внутри плазмы обозначим  $\mathbf{E}(x, t) = E(x) e^{-i\omega t} (1, 0, 0)$ . Нетрудно проверить, что при выбранной конфигурации внешнего электрического поля напряженность магнитного поля равна нулю:  $\mathbf{H} = -(ic/\omega) \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ . Таким образом, магнитное поле не входит в уравнение (1).

Внешнее электрическое поле вызывает изменение химического потенциала. Будем считать это изменение достаточно малым и представим химический потенциал как

$$\mu(x, t) = \mu_0 + \delta\mu(x) e^{-i\omega t},$$

где  $\mu_0 = \text{const}$  — значение химического потенциала, соответствующее отсутствию внешнего электрического поля на поверхности плазмы. Введем безразмерный импульс электронов  $P = p/p_T = v/v_T$  ( $v_T$  — тепловая скорость электронов,  $v_T = \sqrt{2kT/m}$ ) и приведенный (безразмерный) химический потенциал  $\alpha = \mu/kT$ . Тогда для приведенного химического потенциала

$$\alpha(x, t) = \alpha_0 + \delta\alpha(x)e^{-i\omega t}, \quad \alpha_0 = \text{const}.$$

Будем считать, что возмущение приведенного химического потенциала  $\delta\alpha(x, t) = \delta\alpha(x)e^{-i\omega t}$  является малым параметром, т. е.

$$|\delta\alpha(x, t)| = |\delta\alpha(x)| \ll 1.$$

Физический смысл этого неравенства состоит в том, что возмущение химического потенциала существенно меньше тепловой энергии электронов:

$$|\delta\mu(x, t)| \ll \varepsilon_T, \quad \varepsilon_T = \frac{mv_T^2}{2}.$$

Линеаризацию уравнений (1) и (2) проведем относительно абсолютной функции распределения Ферми — Дирака  $f_0$ . Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения:

$$f_{eq}(x, P, t) = f_0(P, \alpha) + g(P, \alpha)\delta\alpha(x)e^{-i\omega t},$$

где

$$f_0(P, \alpha) = f_{FD}(P, \alpha) = \frac{1}{1 + e^{P^2 - \alpha}}; \quad g(P, \alpha) = \frac{e^{P^2 - \alpha}}{(1 + e^{P^2 - \alpha})^2}.$$

Линеаризуем функцию распределения электронов:

$$f(x, P_x, t) = f_0(P, \alpha) + g(P, \alpha)h(x, P_x)e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где  $h(x, P_x)$  — новая неизвестная функция.

Заметим, что в линейном приближении

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e}{p_T} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{P}} = -E(x)e^{-i\omega t} \frac{2eP_x}{p_T} g(P, \alpha).$$

В результате вместо уравнений (1) и (2) получаем

$$-i\omega h(x, P_x) + v_T P_x \frac{\partial h}{\partial x} + v h(x, P_x) = eE(x) \frac{2P_x}{p_T} + v\delta\alpha(x), \quad (4)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{8\pi e p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int h(x, P_x) g(P, \alpha) d^3 P. \quad (5)$$

Далее будем полагать, что  $E(x) = E_0 e(x)$ . Система уравнений (4) и (5) преобразуется к следующему виду:

$$v_T P_x \frac{\partial h}{\partial x} + (v - i\omega)h(x, P_x) = \frac{2eE_0}{P_T} P_x e(x) + \frac{v}{2s_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(P_x, \alpha) h(x, P_x) dP_x, \quad (6)$$

$$E_0 \frac{de(x)}{dx} = \frac{8\pi^2 e p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(P_x, \alpha) h(x, P_x) dP_x. \quad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) перейдем к безразмерным величинам и функциям:

$$x_1 = \frac{x}{\lambda}, \quad P_x = \mu, \quad H(x_1, \mu) = \frac{v p_T}{2eE_0} h(x, \mu),$$

где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега электронов.

После перехода к безразмерным параметрам и функциям получаем следующую систему уравнений:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial x_1} + \omega_0 H(x_1, \mu) = \mu e(x_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu', \quad (8)$$

$$\frac{de(x_1)}{dx_1} = \kappa^2(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu', \quad (9)$$

где

$$\kappa^2(\alpha) = \frac{32\pi^2 e^2 p_T^3 s_0(\alpha)}{(2\pi\hbar)^3 m v^2}.$$

В (8) и (9) введена новая функция

$$k(\mu, \alpha) = \frac{f_0(\mu, \alpha)}{2s_0(\alpha)}$$

с нормировкой  $\int_{-\infty}^{\infty} k(\mu, \alpha) d\mu = 1$ , кроме того,  $\omega_0 = 1 - i\omega/v = 1 - i\omega\tau = 1 - i\Omega/\varepsilon$ , где  $\Omega = \omega/\omega_p$ ,  $\varepsilon = v/\omega_p$  ( $\omega_p$  — плазменная, или ленгмюровская, частота,  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ ;  $N$  — числовая плотность (концентрация) электронов в равновесном состоянии).

Из определения числовой плотности

$$N = \int f_0(P, \alpha) d\Omega = \frac{2p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 P}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} s_2(\alpha),$$

где

$$s_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{P^2 dP}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \int_0^{\infty} P^2 f_0(P, \alpha) dP.$$

Следовательно, числовая плотность частиц плазмы и тепловое волновое число  $k_T = \frac{mv_T}{\hbar}$  связаны соотношением  $N = \frac{s_2(\alpha)k_T^3}{\pi^2}$ , кроме того

$$\kappa^2(\alpha) = \frac{\omega_p^2}{v^2} \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} = \frac{\Omega_p^2}{r(\alpha)} = \frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)},$$

где

$$r(\alpha) = \frac{s_2(\alpha)}{s_0(\alpha)}; \quad \varepsilon = \frac{v}{\omega_p}.$$

С помощью приведенных выражений запишем уравнение (9) в виде

$$\frac{de(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu'. \quad (10)$$

Известно, что частота плазменных колебаний, как правило, существенно больше частоты столкновений электронов в металле, поэтому выполняется условие  $v \ll \omega_p$ . Наиболее типичные значения  $\varepsilon$  заключены в интервале  $10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}$ .

В случае зеркального отражения электронов от поверхности плазмы для функции распределения электронов имеем следующие граничные условия на границе слоя толщиной  $2L$ :

$$f(\pm L, v_x, v_y, v_z, t) = f(\pm L, -v_x, v_y, v_z, t), \quad -\infty < v_x < +\infty.$$

Отсюда для функции  $H(x_1, \mu)$  получаем зеркальные граничные условия:

$$H(l, \mu) = H(l, -\mu), \quad H(-l, \mu) = H(-l, -\mu), \quad \mu > 0, \quad l = L/\lambda. \quad (11)$$

Для электрического поля граничное условие имеет вид

$$e(l) = 1, \quad e(-l) = 1. \quad (12)$$

Таким образом, граничная задача о колебаниях плазмы в слое проводящей среды сформулирована полностью и состоит в нахождении такого решения уравнений (8) и (10), которое должно удовлетворять граничным условиям (11) и (12).

Подробно процесс решения описан в [14]. Сначала отыскивают общее решение уравнений (8) и (10). Разделение переменных, согласно общему методу Фурье, приводит к следующей подстановке:

$$H_{\eta}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) \Phi_1(\eta, \mu) + \exp\left(\frac{w_0 x}{\eta}\right) \Phi_2(\eta, \mu),$$

$$e_{\eta}(x) = \left[ \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) + \exp\left(\frac{w_0 x}{\eta}\right) \right] E(\eta).$$

Здесь  $\eta$  — спектральный параметр (комплексный).

Учитывая граничные условия, получаем решения характеристических уравнений (собственные функции) в виде

$$\Phi_{1,2}(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0} (\mu\eta \mp \eta_1^2) P \frac{1}{\eta \mp \mu} g_{1,2}(\eta) \delta(\eta \mp \mu), \quad \eta, \mu \in (-\infty; +\infty).$$

Здесь  $P \frac{1}{x}$  — главное значение интеграла;  $g_{1,2}(\eta)$  — функции, которые играют роль «произвольной постоянной интегрирования»;  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

При нахождении функций  $g_{1,2}(\eta)$  вводят дисперсионную функцию

$$\Lambda(\eta) = \Lambda(\eta, \Omega, \varepsilon) = 1 + \frac{\eta}{w_0 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_1^2 - \mu\eta}{\mu - z} k(\mu, \alpha) d\mu,$$

где

$$w_0 = 1 - i(\Omega/\varepsilon); \quad \eta_1^2 = \frac{\varepsilon}{2} (\varepsilon - i\Omega) r(\alpha),$$

определяющую спектр решений поставленной задачи. Подробно со схемой решения поставленной задачи можно ознакомиться в [11, 12, 14].

Структура электрического поля в общем случае (разложение по собственным функциям) имеет вид

$$e(x) = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{\infty}} + \frac{2\Lambda_1\eta_0}{\Lambda'(\eta_0)(\eta_1^2 - \eta_0^2)} \frac{\text{ch}(w_0 x / \eta_0)}{\text{ch}(w_0 l / \eta_0)} + \frac{\Lambda_1}{w_0 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2 k(\eta, \alpha)}{\Lambda^+(\eta)\Lambda^-(\eta)} \frac{\text{ch}(w_0 x / \eta)}{\text{ch}(w_0 l / \eta)} d\eta, \quad (13)$$

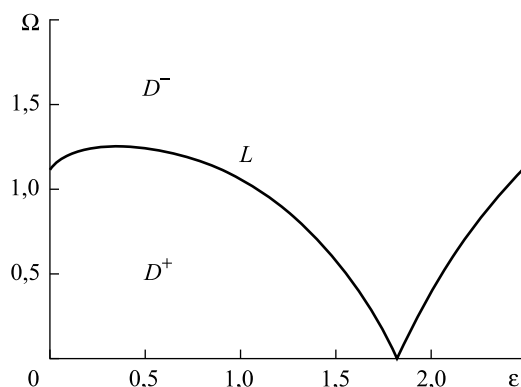
или

$$e(x) = e_{as}(x) + e_d(x) + e_c(x).$$

Множеству значений спектрального параметра  $\eta \in (-\infty; +\infty)$  называемому непрерывным спектром, соответствует решение, которое является аналогом волн Ван Кампена (затухающие в среде волны, возмущенные внешнем полем). Это третье слагаемое в разложении электрического поля по собственным функциям (13).

Первое слагаемое в (13) соответствует бесконечно удаленной точке  $\eta = \infty$ , не зависит от химического потенциала и является аналогом моды Друде, характеризующей объемную проводимость плазмы.

Второе слагаемое в (13) представляет наибольший интерес для решения поставленной задачи. Оно напрямую дает ответ на вопрос об экранировании внешнего электрического поля. При поиске корня дисперсионной функции выяснилось, что корень существует не всегда, а лишь тогда, когда параметры задачи (частота внешнего электрического поля и частота столкновений в плазме) соответствуют некоторым условиям. При использовании принципа аргумента комплексная плоскость  $(\varepsilon, \Omega)$  разделилась на две области: область  $D^+$ , где корень существует, и область  $D^-$  — где не существует (рис. 1).



**Рис. 1.** Деление комплексной плоскости на две области:

$D^+$  — корень существует;  $D^-$  — корень не существует

Моды Дебая описывают так называемое дебаевское экранирование. На рис. 2 видно, как быстро падает соответствующая напряженность внутри слоя. Именно этот процесс называется дебаевским экранированием.

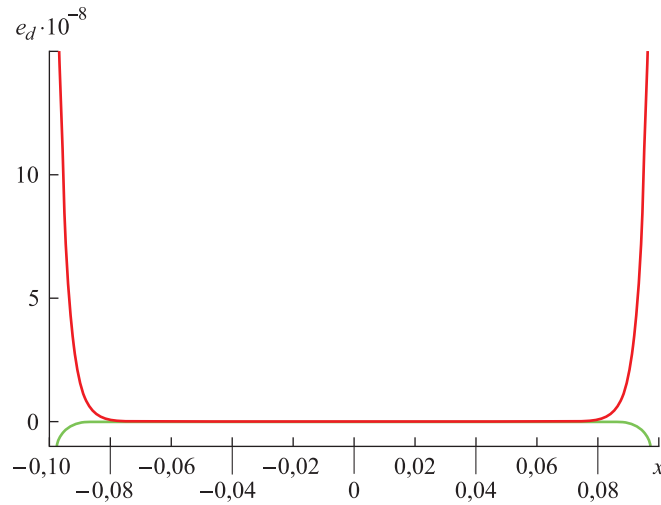
Особенность представленного разложения  $e(x)$  по трем слагаемым (13) состоит в том, что второе слагаемое присутствует не всегда. Существование соответствующего корня дисперсионной функции зависит от параметров задачи. Параметрические уравнения, разделяю-



щие плоскость на области существования и несуществования корня, получены в работе [14]. Они имеют вид:

$$\Omega^2 = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \frac{\eta^2 \left[ \lambda(\eta, \alpha) \left( 1 + \lambda(\eta, \alpha) + (\eta \pi k(\eta, \alpha))^2 \right) \right]^2}{(-\lambda(\eta, \alpha)) \left[ (1 + \lambda(\eta, \alpha))^2 + (\eta \pi k(\eta, \alpha))^2 \right]},$$

$$\varepsilon^2 = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \frac{\eta^4 (\pi k(\eta, \alpha))^2}{(-\lambda(\eta, \alpha)) \left[ (1 + \lambda(\eta, \alpha))^2 + (\eta \pi k(\eta, \alpha))^2 \right]}.$$



**Рис. 2.** Зависимость вещественной (красный цвет) и мнимой (зеленый цвет) составляющих амплитуды электрического поля от координаты  $x$

Рассмотрим первую четверть комплексной плоскости, поскольку параметры  $\varepsilon$  и  $\Omega$  не могут иметь отрицательные значения.

Выбирая различные коэффициенты вырождения плазмы, можно построить зависимость кривой  $L(\alpha)$  от параметров  $\varepsilon$  и  $\Omega$ . На рис. 3 можно видеть, что с увеличением значения химического потенциала кривая  $L(\alpha)$  уходит вверх; на рис. 4 изображена кривая при  $\alpha = 30$ .

Начиная с некоторых значений  $\varepsilon$  с увеличением частоты внешнего электрического поля области  $D^+$  и  $D^-$  перемежаются, т. е. дебаевское экранирование то присутствует, то исчезает. Это явление, связанное с кинетическими процессами в плазме, наблюдается только при больших значениях коэффициента вырождения, когда энергия Ферми значительно превышает тепловую энергию электронов. Для подробного физического объяснения указанного явления требуются дальнейшие исследования, и это предмет другой работы.

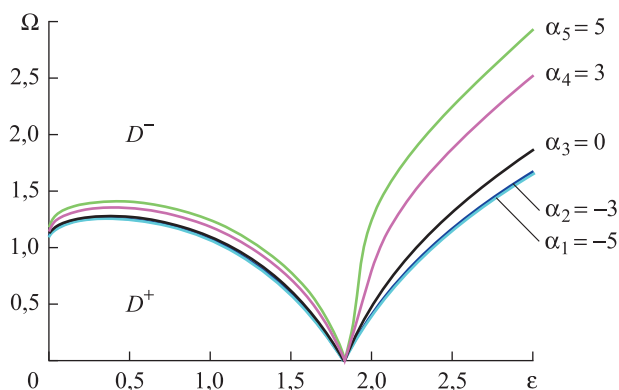


Рис. 3. Параметрические кривые  $L$  при различных значениях химического потенциала

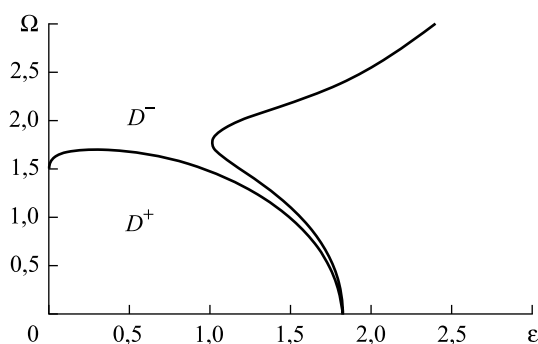


Рис. 4. Вид кривой  $L$  при значении химического потенциала  $\alpha = 30$

Итак, структура напряженности электрического поля нетривиальным образом зависит от параметров поставленной задачи — химического потенциала, частоты внешнего поля и частоты столкновений в плазме. В разложении по собственным функциям второе слагаемое объясняет обнаруженный теоретически эффект присутствия или отсутствия дебаевского экранирования. Указанный эффект связан с существованием соответствующего корня дисперсионной функции. При высоких значениях коэффициента вырождения плазмы наблюдается то появление, то исчезание дебаевского экранирования с увеличением частоты внешнего электрического поля.

В заключение следует отметить важность рассмотренной задачи для различных практических приложений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ландау Л.Д. *О колебаниях электронной плазмы. Собрание трудов.* Москва, Наука, 1969, т. 2, с. 7–25.
- [2] Власов А.А. *ЖЭТФ*, 1938, т. 8, вып. 3, с. 291–318.

- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Статистическая физика*. Москва, Наука, 1964, 567 с.
- [4] Keller O. Local Fields in the Electrodynamics of Mesoscopic Media. *Physics Reports*, 1996, vol. 268, pp. 85–262.
- [5] Girard C., Joachim C., Gauthier S. The Physics of the Near-Field. *Reports on Progress on Physics*, 2000, vol. 63, pp. 893–938.
- [6] Латышев А.В., Юшканов А.А. Взаимодействие электромагнитной Е-волны с тонкой металлической пленкой. *Оптика и спектроскопия*, 2011, т. 110, № 5, с. 796–803.
- [7] Yushkanov A.A., Zverev N.V. Quantum Electron Plasma, Visible and Ultraviolet P-wave and Thin Metallic Fil. *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, pp. 679–684.
- [8] Pitarke J.M., Silkin V.M., Chulkov E.V. and Echenique P.M. Theory of Surface Plasmons and Surface-Plasmon Polaritons. *Reports in Progress in Physics*, 2007, vol. 70, pp. 1–87.
- [9] Латышев А.В., Юшканов А.А. Поверхностные плазменные колебания в тонкой металлической пленке в случае антисимметричной конфигурации магнитного поля. *Оптика и спектроскопия*, 2013, т. 114, № 2, с. 124–128.
- [10] Латышев А.В., Лесскис А.Г., Юшканов А.А. *Теоретическая и математическая физика*, 1992, т. 92, № 1 (июль), с. 127–138.
- [11] Латышев А.В., Юшканов А.А. Плазма в высокочастотном электрическом поле с зеркальным условием на границе. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2006, № 1, с. 165–177.
- [12] Латышев А.В., Юшканов А.А. Вырожденная плазма в полупространстве во внешнем электрическом поле. *Теоретическая и математическая физика*, 2006, т. 144, № 1, с. 488–503.
- [13] Березкина С.В., Кузнецова И.А., Юшканов А.А. Поведение электронной плазмы в тонкой металлической пластине в переменном электрическом поле. *Журнал технической физики*, 2006, т. 76, вып. 5, с. 1–7.
- [14] Латышев А.В., Гордеева Н.М. Поведение плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды. *Теоретическая и математическая физика*, 2017, т. 192, № 3, с. 506–522.

Статья поступила в редакцию 24.05.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гордеева Н.М. Колебательные процессы в электронной плазме с произвольной степенью вырождения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 8. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-8-1796>



**Гордеева Надежда Михайловна** — старший преподаватель кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов — математическое моделирование. e-mail [nmgordeeva@bmstu.ru](mailto:nmgordeeva@bmstu.ru)

## Vibrations in electron plasma featuring an arbitrary degree of degeneracy

© N.M. Gordeeva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The paper analyses a solution to the boundary value problem of plasma responding to an external electric field. We consider vibrations of degenerate electron plasma over a layer of finite thickness. We used the Boltzmann—Vlasov kinetic equation with the Bhatnagar—Gross—Krook collision operator and Maxwell's electric field equation to develop the mathematical simulation. We describe the case of specular electron reflection from the plasma surface. The general solution to the boundary value problem, that is, the electric field intensity, is a linear combination of discrete solutions with constant coefficients and an integral over a continuous spectrum. The discrete solutions prove to be the Drude and Debye solutions known previously, while the continuous spectrum matches the van Kampen waves. We show that the existence of the Debye mode depends on the external electric field frequency and the following plasma parameters: chemical potential and collision frequency. Existence of a complex root of the dispersion function determines the domain of the solution corresponding to the Debye mode. This root may be found by employing the argument principle.*

**Keywords:** eigenfunctions, Drude mode, Debye mode, van Kampen mode, electron plasma, collisional plasma

### REFERENCES

- [1] Landau L.D. O kolebaniyakh elektronnoy plazmy [On the vibrations of electron plasma]. *Sobranie trudov* [Collected works]. Moscow, Nauka Publ., 1969, vol. 2, pp. 7–25.
- [2] Vlasov A.A. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1938, vol. 8, no. 3, pp. 291–318.
- [3] Landau L.D., Lifshits E.M. *Statisticheskaya fizika* [Statistical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1964, 567 p.
- [4] Keller O. *Physics Reports*, 1996, vol. 268, pp. 85–262.
- [5] Girard C., Joachim C., Gauthier S. *Reports on Progress on Physics*, 2000, vol. 63, pp. 893–938.
- [6] Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Optika i spektroskopiya — Optics and Spectroscopy*, 2011, vol. 110, no. 5, pp. 796–803.
- [7] Yushkanov A.A., Zverev N.V. *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, pp. 679–684.
- [8] Pitarke J.M., Silkin V.M., Chulkov E.V., Echenique P.M. *Reports in Progress in Physics*, 2007, vol. 70, pp. 1–87.
- [9] Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Optika i spektroskopiya — Optics and Spectroscopy*, 2013, vol. 114, no. 2, pp. 124–128.
- [10] Latyshev A.V., Lesskis A.G., Yushkanov A.A. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 92, no. 1 (July), pp. 127–138.
- [11] Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics*, 2006, no. 1, pp. 165–177.
- [12] Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 144, no. 1, pp. 488–503.

- [13] Berezkina S.V., Kuznetsova I.A., Yushkanov A.A. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki — Technical Physics*, 2006, vol. 76, no. 5, pp. 1–7.
- [14] Latyshev A.V., Gordeeva N.M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 2017, vol. 192, no. 3, pp. 506–522.

**Gordeeva N.M.**, Assist. Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Specialises in mathematical simulation.  
e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru