

Устойчивость релейной динамической системы с нелинейным датчиком скорости и запаздыванием при действии постоянного возмущения

© Р.П. Симоньянц, Б.Р. Худайбергенов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрено совместное влияние на устойчивость релейной динамической системы запаздывания управляющего воздействия и ограничения выходного сигнала датчика скорости в условиях действия постоянного возмущения. Показано, что у системы при этом обнаруживается новое свойство — появляется неустойчивый предельный цикл. Фазовые траектории стягиваются к устойчивому предельному циклу лишь из той области начальных условий, границы которой определяются траекторией неустойчивого предельного цикла. Методом отображений Пуанкаре найдены параметры неподвижных точек, определяющих неустойчивый предельный цикл как границу области устойчивости. Предложена упрощенная методика приближенного определения простых предельных циклов и устойчивости в «большом» на основе свойства динамической симметрии системы. Методика позволяет исследование рассматриваемой задачи ограничить применением к линиям переключения отображений сдвига и симметрии.

Ключевые слова: релейное управление, устойчивость, предельный цикл, динамическая симметрия, запаздывание, ограничение по скорости, постоянное возмущение

Введение. В начале XXI в. интерес к вопросам управления нелинейными системами с запаздыванием значительно возрос. Опубликовано большое количество работ, посвященных анализу замкнутых систем в условиях запаздывания, предложены разнообразные подходы к решению задач синтеза управления такими системами. Например, в [1] предложен новый алгоритм стабилизации объектов, содержащих запаздывание в сигнале управления. В [2] разработаны методы линеаризации для исследования релейных систем управления с запаздыванием, структурная схема которых имеет нелинейные звенья типа ракетных рулевых приводов с ограничителями. В [3] для релейных систем, содержащих звено с ограничителем, предложен метод исследования периодических режимов, в основе которого — теория фазового годографа. В [4] рассмотрена задача отслеживания траекторий механических систем с учетом запаздывания обратной связи. В [5, 6] системы с запаздывающей обратной связью исследовались на основе функционалов Ляпунова.

В задачах ориентации и стабилизации космических аппаратов вопросы релейного управления с запаздыванием при наличии типо-

вых нелинейностей статических характеристик измерителей фазовых координат также весьма актуальны. Особый интерес представляет проблема совместного влияния запаздывания и того или иного фактора нелинейности, в частности совместного влияния исследуемого в настоящей работе порога насыщения датчика скорости.

Локальное исследование влияния запаздывания показывает, что при некотором критическом соотношении параметров система теряет устойчивость. Локальная вариация зоны насыщения датчика скорости также демонстрирует негативное влияние этого параметра на качество переходного процесса. В то же время, как показано в настоящей работе, в условиях совместного влияния запаздывания и насыщения датчика скорости у системы обнаруживается новое свойство — появляется неустойчивый предельный цикл; система устойчива лишь в определенной области начальных условий, границы которой определяются этим неустойчивым предельным циклом.

Цель настоящей работы — исследовать совместное влияние на устойчивость релейной динамической системы запаздывания управляющего воздействия и ограничения выходного сигнала датчика скорости в условиях действия постоянного возмущения. В качестве расчетной схемы рассматривается типовая упрощенная автономная модель стабилизации по одному каналу управления в предположении, что по другим каналам отклонения фазовых координат от нуля достаточно малы. Авторы статьи предполагают также, что исполнительные органы — реактивные двигатели, динамику которых при работе в релейно-импульсном режиме можно упрощенно представить идеальным усилительным звеном с временным запаздыванием. Управляет движением релейный регулятор общего вида — с зоной нечувствительности и гистерезисом (пространственным запаздыванием) при линейном формировании управляющего сигнала. Исследование системы наиболее полно можно осуществить с помощью метода качественной теории динамических систем на фазовой поверхности [7].

Структура фазовой поверхности. Математическую модель системы можно представить следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = g - aF_{\tau}(\sigma), \\ \sigma = x + kv(y, \beta), \\ v(y, \beta) = \begin{cases} y & \forall |y| < \beta, \\ \beta \operatorname{sgn} y & \forall |y| \geq \beta, \end{cases} \\ F_{\tau}[\sigma(t)] = F[\sigma(t - \tau)], \\ F(\sigma) = \frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(\sigma - \alpha + hF_0) + \operatorname{sgn}(\sigma + \alpha + hF_0)], \end{array} \right. \quad (1)$$

где x, y — фазовые координаты системы (угол и угловая скорость); F_τ — функция запаздывающего аргумента; σ — управляющий сигнал (обратная связь); $v(y, \beta)$ — статическая характеристика датчика скорости; β — ограничение (порог насыщения); τ — запаздывание на включение (τ_1) и на выключение ($\tau_2 \neq \tau_1$); $F(\sigma)$ — релейная функция управления; α — зона нечувствительности релейного регулятора; h — ширина петли гистерезиса; $F_0(t)$ — предыстория $F(t)$, т. е. значение F в предыдущий момент времени $F_0(t) = F(t - 0)$.

Движение (1) может быть представлено на трехлистной фазовой поверхности $\{F^0, F^+, F^-\}$. Если $(x, y) \in F^0$, то изображающая точка движется по траектории Γ^0 , на листах F^+ и F^- — по траекториям Γ^+ и Γ^- . Уравнения фазовых траекторий принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma^0 : y^2 - 2gx &= 2E^0, \\ \Gamma^+ : y^2 - 2(a-g)x &= 2E^+, \\ \Gamma^- : y^2 + 2(a+g)x &= 2E^-. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь в выражении (2) все правые части — константы.

Границами листов фазовой поверхности (ФП) служат линии переключения релейного регулятора. Релейная функция F задана значениями $+1, 0, -1$ и пороговыми значениями управляющего сигнала $\sigma_i, i = \overline{1, 4}$. Условия переключения в соответствии с (1) ($\sigma_i = \{c_i\}$, $c_1 = +\alpha$; $c_2 = +\alpha - h$; $c_3 = -\alpha$; $c_4 = -\alpha + h$) определяют на ФП линии переключения L_i , уравнения которых можно записать таким образом:

$$L_i : x + kv(y, \beta) = c_i, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3)$$

Нелинейная статическая характеристика датчика угловой скорости $v(y, \beta)$ в системе (1) задана кусочно-непрерывной функцией с тремя интервалами непрерывности. В ограниченном замкнутом интервале $[-\beta, +\beta]$ она представлена линейной функцией $v = y$, за его пределами имеет постоянные значения $\pm\beta$. Каждая линия L_i (3) — это объединение трех линейных отрезков.

Для удобства описания структуры ФП введем следующие обозначения: L_i^1 — наклонный участок в области линейности датчика $\forall |y| \leq \beta$; L_i^{+2} — полупрямая — вертикальный участок линии для значений скорости $y > +\beta$; L_i^{-2} — вертикальный участок для значений

$y < -\beta$. С учетом принятых обозначений линию (3) представим следующим образом:

$$\begin{cases} L_i = L_i^{+2} \cup L_i^1 \cup L_i^{-2}, & i = \overline{1, 4}, \\ L_i^1 : x + ky = c_i & \forall |y| \leq \beta, \\ L_i^{+2} : x = c_i - k\beta & \forall y > \beta, \\ L_i^{-2} : x = c_i + k\beta & \forall y < -\beta. \end{cases} \quad (4)$$

Линии (4) — это геометрическое место точек, в которых система выдает сигнал о переключении релейного регулятора (включение или выключение управляющего воздействия). Листы $\{F^0, F^+, F^-\}$ с границами $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ и заполняющими их семействами траекторий $\{\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-\}$ представляют собой статическую структуру фазовой поверхности рассматриваемой динамической системы.

Динамические особенности системы. Рассмотрим характер возможных в системе (1) динамических процессов. Истинное переключение релейного управления наступает спустя время запаздывания $\tau = \{\tau_1, \tau_2\}$ после достижения сигналом σ порогового значения c_i , т. е. после момента пересечения фазовой траекторией статической линии переключения. Геометрическое место точек, в которых происходит переключение с учетом запаздывания, — линии $L_{i,\tau}$; с их помощью определяется динамическая структура ФП. Уравнения линий $L_{i,\tau}$ можно получить, применив к L_i (4) точечное отображение сдвига $T_\tau : (x, y) \xrightarrow{\Gamma^F(\tau)} (x_\tau, y_\tau)$, где $\Gamma^F = \{\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-\}$. Отображение сдвига T_τ каждой точке $(x_i, y_i) \in L_i$, $i = \overline{1, 4}$, ставит в соответствие такую точку $(x_{i,\tau}, y_{i,\tau}) \in L_{i,\tau}$, в которую (x_i, y_i) перейдет за время τ по соответствующей фазовой траектории. Операцию отображения сдвига символически записывают в виде $L_{i,\tau} = T_\tau L_i$, где T_τ — оператор.

Отображение сдвига какого-либо отрезка линии L_i существует, если выполняется следующее условие: фазовые траектории на данной поверхности этот отрезок всюду пересекают. Однако указанное условие выполняется не везде. Например, отрезки $L_1^{+2} \subset L_1$ и $L_3^{-2} \subset L_3$ листа F^0 при $g > 0$ траектории Γ^0 всюду пересекают — в настоящей статье они обозначены как участки, облучаемые траекториями Γ^0 . В то же время отрезки $L_1^{-2} \subset L_1$ и $L_3^{+2} \subset L_3$ ни в одной точке траекто-

риями Γ^0 не пересекаются — это так называемые теньевые участки. Линии L_1^1 и L_3^1 могут быть частично облучаемыми. Аналогичным образом на облучаемые и теньевые подразделяются и границы листов F^+ , F^- .

Анализируя особенности динамической структуры рассматриваемой системы (1), отметим, что ФП в пределах полосы $y = \pm\beta$ не отличается от случая идеальных датчиков. Если настройки релейного регулятора обеспечивают номинальный предельный цикл Γ_n^* с малой амплитудой скорости $|y_1^*| \ll \beta$, то все переходные процессы, в которых переключения управляющих воздействий реализуются на отрезках линий $L_{i,\tau}^1$, будут стягиваться к предельному циклу Γ_n^* . Процесс стягивается тем интенсивнее, чем больше коэффициент усиления k , т. е. чем больше наклон линии переключения. При $|y_0| > \beta$ геометрия ФП радикально изменяется: переключения управляющих воздействий происходят на отрезках $L_{i,\tau}^{+2}$. Вертикальные отрезки L_i^{+2} после отображения сдвига приобретают отрицательный наклон. Этим создаются предпосылки возникновения неустойчивости.

Как показано в работах [8] и [9], в рассматриваемой системе может существовать бесчисленное множество предельных циклов, отличающихся друг от друга формой траектории и параметрами. Из всех возможных предельных циклов только два — простые (элементарные): одноимпульсный Γ_1^* и двухимпульсный Γ_2^* . Предельный цикл Γ_1^* образован замыканием петли $\Gamma_1 = \Gamma^+ \cup \Gamma^0$ при $g > 0$ или $\Gamma_1 = \Gamma^- \cup \Gamma^0$ при $g < 0$. Своими концами дуги Γ^+ , Γ^0 лежат на линиях $L_{1,\tau}$ и $L_{2,\tau}$. Предельный цикл Γ_2^* образован замыканием петли, состоящей из четырех дуг: $\Gamma_2 = \Gamma^+ \cup \Gamma^0 \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0$. Концы дуг лежат на $L_{1,\tau}$, $L_{2,\tau}$, $L_{3,\tau}$, $L_{4,\tau}$. Сложные предельные циклы образуются сшиванием одного или нескольких циклов Γ_2 , которые замыкаются единственным циклом Γ_1 . Поэтому общее число импульсов в предельных циклах $n = 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$. При определенных условиях возможны сверхсложные режимы [9] с числом импульсов $n \rightarrow \infty$ — странный аттрактор Γ_∞^* . Такие квазипериодические движения на ФП занимают ограниченную область $\Gamma_\infty^* \in \{(x, y) : |x| < \alpha, |y| < \varepsilon\}$, где $0 < \varepsilon \ll \beta$.

Фазовые траектории переходных процессов также образуются сшиванием элементарных циклов Γ_1 и Γ_2 . Если траектория образо-

вана сшиванием только циклов Γ_1 , то переходной процесс протекает в скользящем режиме: изображающая точка «скользит» к предельному циклу между линиями $L_{1,\tau}$ и $L_{2,\tau}$ при $g > 0$ или $L_{3,\tau}$ и $L_{4,\tau}$ при $g < 0$. Если траектория образована сшиванием только циклов Γ_2 , то переходный процесс протекает в колебательном режиме, стягиваясь к предельному циклу по кусочно-параболической спирали. В общем случае переходные процессы протекают частично в колебательном, частично в скользящем режиме.

Устойчивость системы. Как это показано в [9], в нелинейной динамической системе (1) возможны лишь два вида стационарных состояний:

1) периодическое движение по траектории одного из предельных циклов Γ_n^* ;

2) квазипериодическое ограниченное движение по траектории странного аттрактора Γ_∞^* .

Рассматривая любой из возможных видов стационарных движений, необходимо определить как параметры этого движения, так и его устойчивость по отношению к вариации фазовых координат. Для одних и тех же исходных данных могут сосуществовать два предельных цикла. Устойчивость этих предельных циклов характеризуется областью притяжения каждого из них. Однако исследование стационарных режимов в задаче настоящей работы не входит.

Исследуем устойчивость системы (1) «в большом», т. е. определим конечную область ФП, из любой точки которой фазовая траектория стягивается к стационарному состоянию. Границей этой области служит некоторая критическая фазовая траектория Γ^k , для отыскания которой может быть применена теория точечных отображений. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предварительный анализ динамических особенностей системы показал, что отрезки L_i^{+2} после отображения сдвига $L_{i,\tau}^{+2} = T_\tau L_i^{+2}$ приобретают отрицательный наклон, чем объясняется возможность возникновения неустойчивости при больших отклонениях фазовых координат. Критическая траектория Γ^k , формируясь элементарными циклами $\Gamma_2 = \Gamma^+ \cup \Gamma^0 \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0$, должна быть замкнутой — это двухимпульсный неустойчивый предельный цикл Γ_2^{k*} . Для его определения можно построить точечное отображение T_2 линии без контакта $L_{1,\tau}$ в себя, осуществляемое траекторией Γ_2 . Отображение T_2 целесообразно выразить через промежуточные точечные отображения:

$$T_{i(i+1),\tau} = L_{i,\tau} \xrightarrow{\Gamma^F} L_{(i+1),\tau}, \quad y_{(i+1),\tau} = f_{i(i+1),\tau}(y_{i,\tau}), \quad (5)$$

$$\Gamma^F = \{\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя (5), для отображения $T_2 = T_{12}T_{23}T_{34}T_{41}$ получаем функцию последования

$$\bar{y}_{1,\tau} = f_2(y_{1,\tau}) = f_{41}\left(f_{34}\left(f_{23}\left(f_{12}(y_{1,\tau})\right)\right)\right). \quad (6)$$

Неподвижную точку отображения T_2 находим, используя диаграмму Ламерея, на которой методом итераций ищем корень трансцендентного уравнения, полученного из (6) и условия $\bar{y}_{1,\tau} = y_{1,\tau} = y_{1,\tau}^*$:

$$f_{41}\left(f_{34}\left(f_{23}\left(f_{12}(y_{1,\tau}^*)\right)\right)\right) - y_{1,\tau}^* = 0. \quad (7)$$

Построим сначала границы динамической структуры — линии $L_{i,\tau}$. Поскольку рассматривается вопрос устойчивости «в большом», будем разыскивать неустойчивый предельный цикл $\Gamma_2^{\kappa*}$, траектория которого не пересекает наклонных участков L_i^1 линий переключения. Следовательно, задача построения точечного отображения T_2 может быть существенно упрощена за счет исключения из рассмотрения участков L_i^1 . Применяя к линиям $L_i^{+2}, L_i^{-2} \quad \forall |y| > \beta$ (4) операцию отображения сдвига T_τ , получим:

$$\begin{cases} L_{1,\tau}^{+2} : x = \alpha - k\beta + y\tau_1 - \frac{1}{2}g\tau_1^2 & \forall y \geq \beta + g\tau_1, \\ L_{2,\tau}^{-2} : x = \alpha - h + k\beta + y\tau_2 + \frac{1}{2}(a-g)\tau_2^2 & \forall y \leq -\beta - (a-g)\tau_2, \\ L_{3,\tau}^{-2} : x = -\alpha + k\beta + y\tau_1 - \frac{1}{2}g\tau_1^2 & \forall y \leq -\beta + g\tau_1, \\ L_{4,\tau}^{+2} : x = -\alpha + h - k\beta + y\tau_2 - \frac{1}{2}(a+g)\tau_2^2 & \forall y \geq \beta + (a+g)\tau_2. \end{cases} \quad (8)$$

Для упрощения записи индексы у переменных (x, y) в уравнениях (8) опущены. Функции соответствия (5) на основании уравнений (2) и (8) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} T_{12} : y_{2,\tau} = f_{12}(y_{1,\tau}) = -b\tau_2 - \sqrt{y_{1,\tau}^2 + 2b(h - 2k\beta + \tau_1 y_{1,\tau}) - bg\tau_1^2}, \\ T_{23} : y_{3,\tau} = f_{23}(y_{2,\tau}) = g\tau_1 - \sqrt{y_{2,\tau}^2 - 2g\tau_2 y_{2,\tau} + bg\tau_2^2 + 2g(\epsilon_3 - \epsilon_2)}, \\ T_{34} : y_{4,\tau} = f_{34}(y_{3,\tau}) = d\tau_2 + \sqrt{y_{3,\tau}^2 + 2d(h - 2k\beta - \tau_1 y_{3,\tau}) + dg\tau_1^2}, \\ T_{41} : y_{1,\tau} = f_{41}(y_{4,\tau}) = g\tau_1 + \sqrt{y_{4,\tau}^2 - 2g\tau_2 y_{4,\tau} + dg\tau_1^2 + 2g(\epsilon_1 - \epsilon_4)}, \end{cases} \quad (9)$$

где $b = a - g$; $\epsilon_3 = -\alpha$; $\epsilon_2 = \alpha - h$; $d = a + g$; $\epsilon_1 = \alpha$; $\epsilon_4 = -\alpha + h$.

Точечное отображение T_2 определено в области $y_{1,\tau} \geq (y_{1,\tau})_{\text{гр}}$, где $(y_{1,\tau})_{\text{гр}}$ — координата граничной точки $(1_\tau)_{\text{гр}}$ участка $L_{1,\tau}^{+2}$, которую найдем обратным отображением точки $A_4^+(x_{A_4}^+, y_{A_4}^+)$ начала отрезка L_4^{+2} на линию $L_{1,\tau}^{+2}$ (рис. 1).

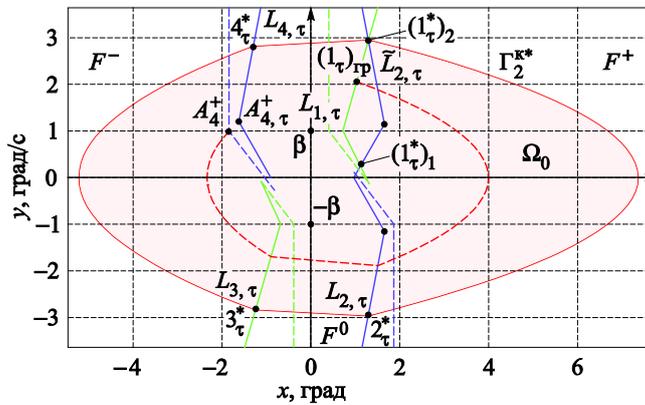


Рис. 1. Неустойчивый предельный цикл $\Gamma_2^{к*}$ и область устойчивости Ω_0

Подстановкой в (6) функций соответствия (9) получаем функцию последования отображения T_2 . Найти неподвижную точку можем из решения уравнения (7) или геометрически при помощи диаграммы Ламерея. На рис. 2 по найденным аналитическим соотношениям построена диаграмма Ламерея и определены искомые параметры неподвижной точки $1_\tau^*(x_{1,\tau}^*, y_{1,\tau}^*)$. Поскольку в неподвижной точке выполняется условие $\left. \frac{\partial \bar{y}_{1,\tau}}{\partial y_{1,\tau}} \right|_{1_\tau^*} > 1$, то в соответствии с теоремой Кёнигса — Ламерея этот предельный цикл неустойчив.

Используя функции соответствия и уравнения фазовых траекторий, построим для найденной неподвижной точки неустойчивый предельный цикл. Его траектория $\Gamma_2^{к*}$, как это показано на рис. 1, является искомой границей области устойчивости «в большом» Ω_0 .

Функции соответствия дают возможность по координатам точки $1_\tau^* \in \Gamma_2^{к*}$ определить остальные узловые точки (точки сшивания кусочно-непрерывной траектории $\Gamma_2^{к*}$): $1_\tau^* \xrightarrow{\Gamma^+} 2_\tau^* \xrightarrow{\Gamma^0} 3_\tau^* \xrightarrow{\Gamma^-} 4_\tau^*$ (см. рис. 1). По значениям координат точек $\{1_\tau^*, 2_\tau^*, 3_\tau^*, 4_\tau^*\}$ и (2) находим уравнения каждого куска траектории $\Gamma_2^{к*}$. Тем и завершает-

ся задача определения области Ω_0 устойчивости системы (1) «в большом». Для всех начальных значений фазовых координат $(x_0, y_0) \in \Omega_0$ переходные процессы стягиваются к малому устойчивому предельному циклу. Если $(x_0, y_0) \notin \Omega_0$ — система теряет устойчивость, ее фазовая траектория неограниченно раскручивается по кусочно-параболической спирали.

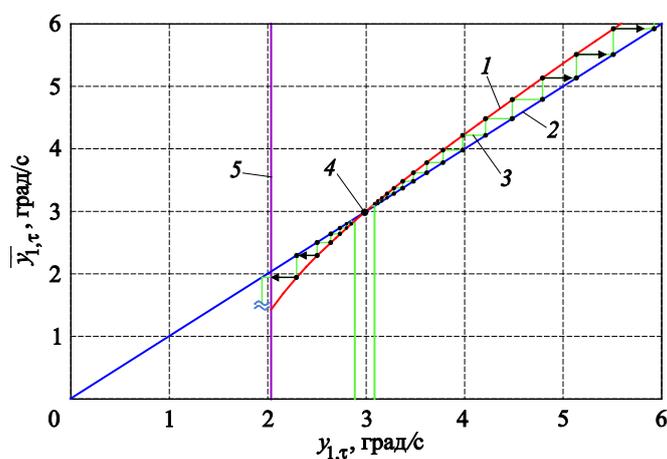


Рис. 2. Диаграмма Ламерая:

1 — функция последования (6); 2 — биссектриса; 3 — лестница Ламерая; 4 — неподвижная точка ($y_{1,\tau}^* = 2,9816$ град/с); 5 — граница области определения функции последования ($a = 0,015$ рад/с²; $g = 0,002$ рад/с²; $\alpha = 1,2^\circ$; $h = 0,15^\circ$; $\beta_2 = 1$ град/с; $k = 0,8$ с; $\tau_1 = 0,3$ с; $\tau_2 = 0,2$ с)

Аналитическое решение на основе динамической симметрии.

В проектных исследованиях удобно использовать аналитические решения, позволяющие учитывать их зависимость от параметров системы, прогнозировать их влияние на динамику движения. В связи с этим большой интерес представляют методы решений. Рассмотрим возможность получения приближенного аналитического решения за счет использования свойств динамической симметрии системы. Свойства симметрии фазовых траекторий неоднократно использовались в работах [8, 10] и др. В [11], например, исследуются бифуркации потери симметрии динамических процессов; в [12] на основе построения групп симметрии разрабатываются алгоритмы идентификации и синтеза управления сложными системами.

Симметрия относительно оси Ox траекторий рассматриваемой нами динамической системы (1) позволяет построение точечных отображений существенно упростить. При этом можно разыскивать и устойчивые, и неустойчивые простые симметричные предельные

циклы, ограничившись преобразованием кусочно-непрерывной (ломаной) линии $L_{1,\tau} \forall y \geq g\tau_1$ в ломаную линию $L_{2,\tau} \forall y \leq -(a-g)\tau_2$.

Поскольку траектория Γ^+ в предельном цикле Γ_1^* своими концами лежит на этих линиях в симметрично расположенных относительно оси Ox точках 1_τ^* и 2_τ^* , то для отыскания этих точек достаточно найти общие точки линии $L_{1,\tau} \forall y \geq g\tau_1$ и линии $\tilde{L}_{2,\tau} \forall y > (a-g)\tau_2$, где $\tilde{L}_{2,\tau}$ — отображение симметрии (зеркальное отражение) линии $L_{2,\tau}$ в верхнюю полуплоскость листа F^+ . Аналогично может быть найдена неподвижная точка для предельного цикла Γ_2^* , если возмущение g настолько мало, что асимметрией траектории Γ_2^* можно пренебречь.

Для определения устойчивых неподвижных точек необходимо уравнение $L_{1,\tau}^{+2}$ (8) дополнить уравнением отрезка $L_{1,\tau}^1$:

$$L_{1,\tau} = \begin{cases} L_{1,\tau}^1 : x + y(k - \tau_1) = \alpha + g\tau_1 \left(k - \frac{1}{2}\tau_1 \right) & \forall |y| \in [0, \beta + g\tau_1], \\ L_{1,\tau}^{+2} : x = \alpha - k\beta + y\tau_1 - \frac{1}{2}g\tau_1^2 & \forall y \geq \beta + g\tau_1. \end{cases} \quad (10)$$

Для того чтобы получить уравнение $\tilde{L}_{2,\tau}$, достаточно в уравнении $L_{2,\tau}$ (8) изменить знак скорости:

$$\tilde{L}_{2,\tau} = \begin{cases} \tilde{L}_{2,\tau}^1 : x - y(k - \tau_2) = \alpha - h + \tau_2(g - a) \left(k - \frac{1}{2}\tau_2 \right) & \\ \forall |y| \in [0, \beta + (a - g)\tau_2], & \\ \tilde{L}_{2,\tau}^{-2} : x + y\tau_2 = \alpha - h + k\beta + \frac{(a - g)\tau_2^2}{2} & \\ \forall y > \beta + (a - g)\tau_2. & \end{cases} \quad (11)$$

Для определения неподвижных точек необходимо решить систему кусочно-непрерывных уравнений (10) и (11), что геометрически интерпретируется как пересечение линий $L_{1,\tau} \cap \tilde{L}_{2,\tau}$ (см. рис. 1). При этом устойчивая неподвижная точка $(1_\tau^*)_1 = L_{1,\tau}^1 \cap \tilde{L}_{2,\tau}^1$, а неустойчивая $(1_\tau^*)_2 = L_{1,\tau}^{+2} \cap \tilde{L}_{2,\tau}^{-2}$. Поскольку уравнения пересекающихся отрезков линейны, вопрос определения их корней чрезвычайно прост. Для не-

подвижной точки устойчивого предельного цикла Γ_1^* получаем аналитическое выражение

$$y_{1,\tau}^* = \frac{h + g\tau_1(k - \frac{1}{2}\tau_1) + \tau_2(a - g)(k - \frac{1}{2}\tau_2)}{(k - \tau_1) + (k - \tau_2)}.$$

Для неустойчивого предельного цикла Γ_2^{k*} , определяющего собой границу области устойчивости системы «в большом», получаем также простое аналитическое выражение

$$y_{12,\tau}^* = \frac{4k\beta - 2h + g\tau_1^2 + (a - g)\tau_2^2}{2(\tau_2 + \tau_1)}. \quad (12)$$

Теоретические результаты, полученные в работе, подтверждены численным моделированием. Моделирование выполнено в программном комплексе Model [10].

На рис. 3 представлены результаты численного эксперимента для исходных данных, соответствующих гипотетической системе, которая рассмотрена в качестве расчетного примера на рис. 1 и 2. Аналитическая формула (12) дает значение координаты точки переключения в неустойчивом предельном цикле $y_{12,\tau}^* = 2,94011$ град/с (с ошибкой $< 1,5\%$).

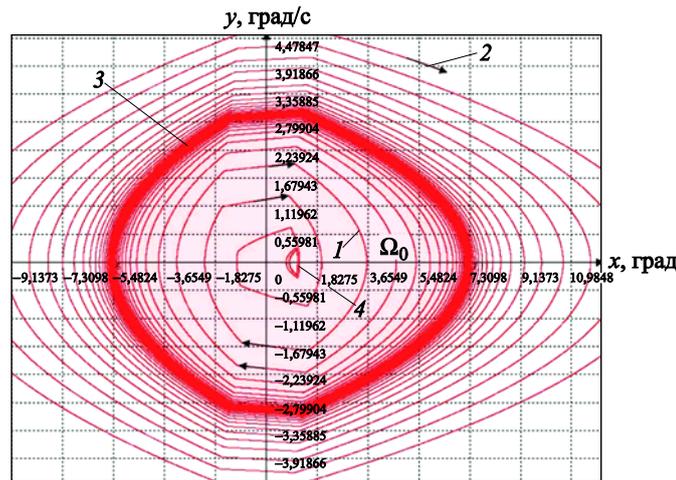


Рис. 3. Фазовые траектории движений от границы области устойчивости Ω_0 :

1 — движение в пределах Ω_0 к устойчивому предельному циклу Γ_1^* ; 2 — неограниченная раскачка колебаний за пределами области Ω_0 ; 3 — траектория неустойчивого предельного цикла Γ_2^{k*} ; 4 — устойчивый предельный цикл Γ_1^*

Заключение. Показано, что в релейной динамической системе при постоянном внешнем возмущении, запаздывании управления и нелинейности датчика скорости типа «насыщение» устойчивость по начальным значениям фазовых координат ограничена. Построением точечного отображения Пуанкаре найдены параметры неподвижных точек, определяющих неустойчивый предельный цикл как границу области устойчивости системы «в большом».

Предложена упрощенная методика определения простых предельных циклов и устойчивости «в большом» на основе свойства динамической симметрии системы. При этом рассмотрение ограничивается построением отображений сдвига линий переключения и преобразованием симметрии относительно оси абсцисс фазовой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А. Стабилизация нелинейного объекта с входным запаздыванием и синусоидальным возмущающим воздействием. *Автоматика и телемеханика*, 2015, № 1, с. 21–30.
- [2] Мозжоров А.В., Фалдин Н.В. Линеаризация по полезному сигналу релейных систем с трехпозиционным релейным элементом и нелинейным объектом управления. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2008, № 4, с. 5–14.
- [3] Fridman L. Semiglobal stabilization of linear uncertain system via delayed relay control. *Variable Structure Systems: from Principles to Implementation*. London, 2004, pp. 377–400.
- [4] Перегудова О.А. К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении. *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 5, с. 95–105.
- [5] Павликов С.В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием. *Механика твердого тела*, 2005, вып. 35, с. 212–216.
- [6] Павликов С.В. О стабилизации движений управляемых систем с запаздывающим регулятором. *Доклады Академии наук*, 2007, т. 412, № 2, с. 176–178.
- [7] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2*. Москва, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009, 548 с.
- [8] Гаушус Э.В. *Исследование динамических систем методом точечных преобразований*. Москва, Наука, 1976, 368 с.
- [9] Симоньянц Р.П. Квантово-механическая модель динамики релейно-импульсного управления. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2016, № 3, с. 88–101. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-3-88-101
- [10] Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1972, 472 с.
- [11] Лерман Л.М., Тураев Д.В. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах. *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 2, с. 323–343.
- [12] Никуличев Е.В. Симметрия в динамических моделях систем управления. *Вестник Тамбовского университета*, 2003, т. 8, № 3, с. 423.

Статья поступила в редакцию 25.11.2019

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной молодежной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 105-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (ММНТК АКТ-2019), 28 мая 2019 г., Реутов, Российская Федерация

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Симоньянц Р.П., Худайбергенов Б.Р. Устойчивость релейной динамической системы с нелинейным датчиком скорости и запаздыванием при действии постоянного возмущения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 3.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-3-1966>

Симоньянц Ростислав Петрович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, декан Аэрокосмического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: rps@bmstu.ru

Худайбергенов Борислав Рустамович — студент Аэрокосмического факультета кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: borislav.98@mail.ru

Stability of a relay dynamic system with non-linear speed sensor and delay under constant disturbance

© R.P. Simonyants, B.R. Khudaybergenov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper considers the joint effect of the control delay and speed sensor output signal limiting on the stability of the relay dynamic system under the constant disturbance. It is shown that in this case a new property is detected in the system – the appearance of the unstable limit cycle. Phase trajectories are drawn to a stable limit cycle only from the area of initial conditions where their boundaries are determined by the trajectory of an unstable limit cycle. Using the method of Poincare mappings, the parameters of fixed points defining the unstable limit cycle as the boundary of the stability region are found. A simplified method for approximate determination of simple limit cycles and stability in the “large” is proposed based on the property of dynamic symmetry of the system. The method allows the study of the problem under consideration to be limited to applying shift and symmetry mappings to the switching lines.

Keywords: relay control, stability, limit cycle, dynamic symmetry, delay, speed limit, constant disturbance

REFERENCES

- [1] Bobtsov A.A., Kolubin S.A., Pyrkin A.A. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2015, no. 1, pp. 21–30.
- [2] Mozzhorov A.V., Faldin N.V. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, no. 4, pp. 5–14.
- [3] Fridman L. Semiglobal stabilization of linear uncertain system via delayed relay control. In: *Variable Structure Systems: from Principles to Implementation*. London, The Institution of Engineering and Technology Publ., 2004, pp. 377–400.
- [4] Peregudova O.A. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2009, no. 5, pp. 95–105.
- [5] Pavlikov S.V. *Mekhanika tvordogo tela — Solid mechanics*, 2005, no. 35, pp. 212–216.
- [6] Pavlikov S.V. *Doklady RAN — Reports of RAS*, 2007, vol. 412, no. 2, pp. 176–178.
- [7] Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L. *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike. Chast 2 [Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 2]*. Moscow, Izhevsk, NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Institut komputernykh issledovaniy Publ., 2009, 548 p.
- [8] Gaushus E.V. *Issledovanie dinamicheskikh sistem metodom tochechnykh preobrazovaniy [Research of dynamic systems by the point transformation method]*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 368 p.
- [9] Simonyants R.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2016, no. 3, pp. 88–101. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-3-88-101
- [10] Neymark Yu.I. *Metod tochechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy [Point mapping method in the theory of nonlinear vibrations]*. Moscow, Nauka Publ., 1972, 472 p.

- [11] Lerman L.M., Turayev D.V. *Nelineynaya dinamika — Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2012. vol. 8, no. 2, pp. 323–343.
- [12] Nikulichev Ye.V. *Vestnik Tambovskogo Universiteta — Tambov University Review*, 2003, vol. 8, no. 3, pp. 423.

Simonyants R.P., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Dean, Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: rps@bmstu.ru

Khudaybergenov B.R., student, Department of Aerospace Systems, Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: borislav.98@mail.ru