

О структуре оптимальной тяги для «промежуточной» модели летательного аппарата

© О.Ю. Черкасов, Н.В. Смирнова

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Представлены модификация задачи о брахистохроне, включающая в целевую функцию наряду с временем процесса штраф на расход топлива. Материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, вязкого нелинейного трения и силы тяги. Сделано предположение, что изменение подъемной силы не влияет на силу сопротивления. Угол наклона траектории и тяга рассмотрены как управляющие переменные. Принцип максимума Понтрягина позволяет свести задачу оптимального управления к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. Качественный анализ данной системы позволяет изучить ключевые особенности экстремальных траекторий, в том числе их асимптотическое поведение. Экстремальное управление тягой получено в зависимости от скорости и угла наклона траектории. Определена структура экстремальной тяги, аналитически установлено количество переключений. Приведены результаты численного решения краевой задачи, иллюстрирующие аналитические выводы.

Ключевые слова: брахистохрона, особое управление, фазовый портрет, управление тягой

Введение. Представлено движение материальной точки с массой m в вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести и однородной сопротивляющейся среде. Сделано предположение, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения в степени n . Угол наклона траектории и тяга рассмотрены как управляющие переменные. Целевая функция процесса состоит из двух частей: горизонтальной дальности (терминальный член) и штрафа за расход топлива (интегральный член). Наряду с задачей максимизации дальности может быть показана модифицированная задача о брахистохроне, сформулированная следующим образом: найти кривую, соединяющую две точки в вертикальной плоскости, вдоль которой точечная масса в поле сил тяжести и неконсервативной силы движется от начальной до конечной точки в кратчайшее время с учетом целевой функции. Зависимость максимальной дальности от времени является монотонной, в этом случае задачи о брахистохроне и максимизации дальности взаимны: возьмем максимальное значение дальности, полученное в результате решения задачи с фиксированным временем, в качестве заданного конечного условия для задачи о брахистохроне. Тогда минимальное время, полученное в результате решения последней, совпадает со временем, которое было зафиксировано при реше-

нии задачи максимизации дальности. Траектории в этих задачах совпадают.

Теории — классическая вариационного исчисления и оптимального управления — были применены к задаче максимизации высоты вертикального подъема ракеты при заданном количестве топлива, иначе говоря, оптимальному программированию тяги вдоль одномерной траектории. Два частных случая: с линейной зависимостью сопротивления от скорости и с квадратичной зависимостью от скорости — были рассмотрены в работе [1]. Авторы [2] изучили оптимальный полет в вертикальной плоскости для «промежуточной» модели летательного аппарата (ЛА), когда угол наклона траектории полета может быть задан в качестве управляющего параметра, при этом принято, что конечное значение топлива — свободное. Такая модель подходит для исследования оптимального движения специальных типов ЛА, поскольку для них возможно изменение подъемной силы без изменения сопротивления. «Промежуточную» модель также допустимо использовать для описания движения центра масс вращающихся тел, в которых сила Магнуса играет роль подъемной силы. Она может быть рассмотрена в качестве первого приближения иных моделей ЛА. Для различных модификаций задачи о брахистохроне с вязким трением нормальная составляющая силы реакции кривой также позволяет изменять угол наклона траектории без изменения силы сопротивления [3]. Отметим, что для случая кулоновского трения, действующего на точку, движущуюся вдоль проволоки, анализ угла наклона траектории в качестве управления невозможен [4–6]. Обобщения классической задачи о брахистохроне с ускоряющей силой раскрыты, например, в работе [3], где были представлены результаты численного моделирования для случая ускоряющей силы, пропорциональной скорости. В [7] решение той же задачи было получено с использованием генетического алгоритма для демонстрации его эффективности. В [8] изучена задача о брахистохроне с постоянной силой тяги, в [9] — при наличии силы линейного вязкого трения и постоянной силы тяги. Случай квазипостоянной силы тяги для специального класса оптимальных траекторий показан в работе [10]. Свойства траекторий с квазипостоянной силой тяги без трения были исследованы аналитически в [11]. Задачи о брахистохроне с постоянной ускоряющей силой и максимизации дальности представлены в [12], где были применены качественные методы исследования динамических систем для определения характерных особенностей экстремальных траекторий.

В настоящей статье учтены две управляющие переменные:

- тяга p ;
- угол наклона траектории θ .

Считаем, что можно управлять углом наклона траектории, поскольку в рассматриваемой задаче изменение подъемной силы не влияет на сопротивление.

Цель настоящей статьи — продолжение исследований [13–15] для модели нелинейного вязкого трения и расширение результатов для случая фиксированной конечной высоты.

Постановка задачи. Рассмотрено движение материальной точки по кривой (рис. 1), где N — сила реакции кривой; Q — сопротивление; m — движение материальной точки с массой; g — ускорение свободного падения; p — тяга (второй управляющий параметр), значение которой ограничено условием $-\bar{p} \leq p(t) \leq \bar{p}$ (\bar{p} — положительная константа); v — модуль скорости; x — горизонтальная координата; y — вертикальная координата; θ — угол наклона траектории (первый управляющий параметр).

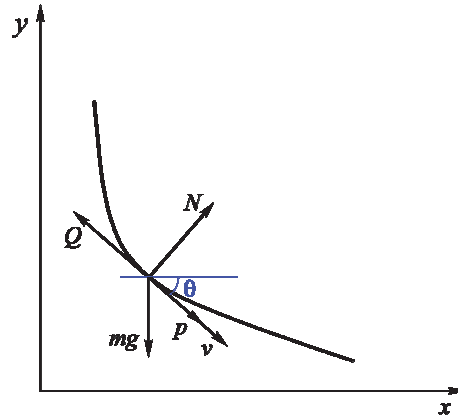


Рис. 1. Движение материальной точки массой m по кривой

Отметим, что оба управления — кусочно-непрерывные функции от времени.

Уравнения движения материальной точки с постоянной массой в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = -v^n + p - \sin \theta, \end{cases} \quad (1)$$

где n — натуральное число, частным случаям $n \in \{1; 2\}$ соответствуют линейная и квадратичная модели вязкого трения.

Краевые условия для системы (1):

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, y(T) = y_T, \quad (2)$$

где T — конечный момент времени.

Традиционно задача оптимального управления заключается в минимизации функционала. В данном случае цель управления состоит в следующем:

$$J = -x(T) + \int_0^T p^2 \rightarrow \min_{p, \theta}. \quad (3)$$

Иными словами, смысл функционала (3) — максимизация конечной дальности полета $x(T)$ со штрафом за расход топлива. Время окончания процесса T фиксировано.

Введем новую переменную ξ в виде $\xi(t) = \int_0^t p^2(\tau) d\tau$ (тогда $\dot{\xi}(t) = p^2$), для того чтобы свести условия (1)–(3) к задаче Майера [16]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = -v^n + p - \sin \theta, \\ \dot{\xi} = p^2 \end{cases} \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, y(T) = y_T, \xi(0) = \xi_0. \quad (5)$$

В результате функционал можно записать в виде

$$J = -x(T) + \xi(T) \rightarrow \min_{p, \theta}, \quad (6)$$

где θ и p — управляющие параметры.

Аналитическое решение задачи. Представим гамильтониан для задачи, определяемой (4)–(6) как скалярное произведение вектора сопряженных переменных ψ на вектор правых частей системы (4) [17]:

$$H = \psi_x v \cos \theta + \psi_y v \sin \theta + \psi_v (p - v^n - \sin \theta) + \psi_\xi p^2 = C, \quad (7)$$

где C — неизвестная константа.

Уравнения для сопряженных переменных можно представить в следующем виде:

$$\dot{\psi}_x = 0, \dot{\psi}_y = 0, \dot{\psi}_\xi = 0, \dot{\psi}_v = -\cos \theta + n v^{n-1} \psi_v. \quad (8)$$

Из условий трансверсальности получим

$$\psi_x(t) = 1, \psi_y(t) = a, \psi_\xi(t) = -1, \psi_v(T) = 0, t \in [0, T].$$

Запишем условия экстремума функции H :

- по управляющему параметру θ :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -v \sin \theta + a v \cos \theta - \psi_v \cos \theta = 0, \quad (9)$$

и, учитывая условия трансверсальности и (9), можем написать

$$\psi_v = v(a - \operatorname{tg} \theta), \operatorname{tg} \theta(T) = a;$$

- по управляющему параметру p :

$$\partial H / \partial p = \psi_v - 2p.$$

Критерий Сильвестра максимума функции двух переменных имеет вид $H''_{\theta\theta}H''_{pp} - (H''_{p\theta})^2 = \frac{2v}{\cos\theta > 0}$, следовательно, экстремум существует. Из уравнений

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = -2 < 0; \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = \frac{-v}{\cos\theta < 0}$$

ясно, что при $\cos\theta > 0$ этот экстремум будет максимумом функции H . Если представить экстремальную тягу в виде

$$p_0 = \frac{\psi_v}{2} = \frac{v(a - \operatorname{tg}\theta)}{2},$$

то получим следующий закон управления тягой:

$$p(t) = \begin{cases} \bar{p}, p_0 \geq \bar{p}, \\ p_0, -\bar{p} \leq p_0 \leq \bar{p}, \\ -\bar{p}, p_0 \leq -\bar{p}. \end{cases} \quad (10)$$

Дифференцируя выражение (9) по времени с учетом систем (4) и (8), получим дифференциальное уравнение для переменной θ . Следовательно, задача оптимального управления, определяемая выражениями (4)–(6), будет сведена к краевой:

$$\begin{cases} \dot{v} = p(t) - v^n - \sin\theta, & v(0) = v_0, \\ \dot{\theta} = \frac{\cos\theta}{v} (1 + [(n+1)v^n - p(t)][\sin\theta - a \cos\theta]), & \operatorname{tg}\theta(T) = a. \end{cases} \quad (11)$$

С учетом вида управления тягой (10) можно разбить плоскость (v, θ) на области, в которых она принимает граничные и промежуточные значения в зависимости от параметра $a = \psi_y(t)$ (рис. 2).

Терминальное множество лежит в области, где следует использовать промежуточную тягу (см. рис. 2). Следовательно, дуга промежуточной тяги примыкает к концу экстремальной траектории.

Дальнейшее исследование будет ограничено случаем линейного вязкого трения. Краевая задача (11) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{v} = p(t) - v^n - \sin\theta, & v(0) = v_0, \\ \dot{\theta} = \frac{\cos\theta}{v} (1 + [2v - p(t)][\sin\theta - a \cos\theta]), & \operatorname{tg}\theta(T) = a, \end{cases} \quad (12)$$

где управление тягой $p(t)$ определяется законом (10).

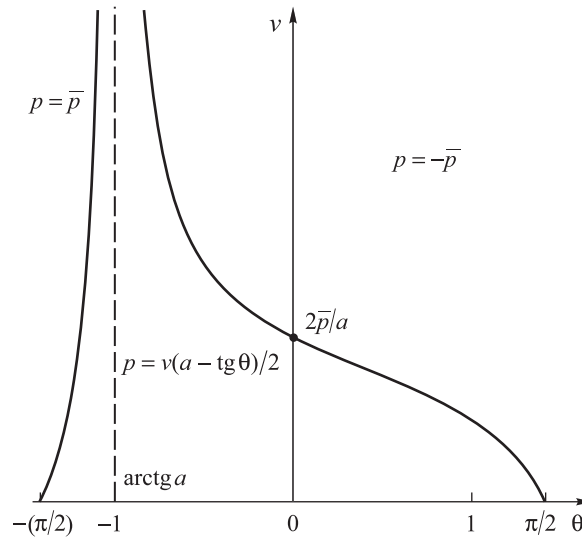


Рис. 2. Области граничных и промежуточной тяг для $a = 2$

Рассмотрим случай движения точки при граничных значениях тяги $p(t) = \bar{p}$. Стационарные точки системы (12) можно найти, используя выражения

$$\bar{p} - v - \sin \theta = 0, \quad \frac{\cos \theta}{v} = 0.$$

Вертикальному движению вниз в плоскости (x, y) соответствуют следующие стационарные решения (которые соответствуют движениям):
первое (вертикально вниз)

$$v_1 = \bar{p} + 1, \theta_1 = -\frac{\pi}{2};$$

второе (вертикально вверх)

$$v_1 = \bar{p} - 1, \theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

что возможно при $\bar{p} > 1$.

Анализируя собственные числа системы (12), линеаризованной в окрестности полученных стационарных решений, приходим к выводу, что эти точки являются устойчивыми узлами. Для исследования случай

$$\begin{cases} \bar{p}(t) - v - \sin \theta = 0, \\ (1 + [2v - p(t)][\sin \theta - a \cos \theta]) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

гораздо сложнее. Систему (13) можно привести к следующему выражению:

$$f(\theta) = 1 + (\bar{p} - 2 \sin \theta)(\sin \theta - a \cos \theta) = 0. \quad (14)$$

Поскольку $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\bar{p} - 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{p} - 1$, для значений $\bar{p} > 1$

уравнение (14) имеет решение, которому в плоскости (x, y) соответствует наклонное движение материальной точки. Фазовые портреты системы (12) показаны на рис. 3. Наклонному движению соответствует стационарное решение для особого типа стационарной седловой точки (см. рис. 3). Аналитическое исследование этого решения в случае свободной конечной высоты приведено в статье [13].

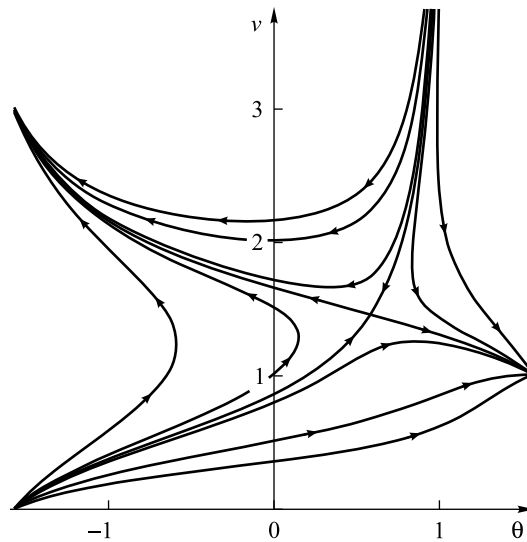


Рис. 3. Фазовый портрет системы (12) для $\bar{p} = 2, a = 2$

Рассмотрим случай промежуточной тяги $p_0 = \frac{v(a - \operatorname{tg}\theta)}{2}$. Фазовые портреты системы (12) для различных значений параметра a , соответствующие движению с промежуточной тягой, приведены на рис. 4. Существует единственное стационарное решение для особой седловой точки в области $v > 0, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тип этого стационарного решения был установлен для $a = 0$ и $a = 2$. Фазовые портреты на рис. 4 были построены как линии уровня функции (7), т. е. как линии первого интеграла системы (12). Качественный анализ (12) позволяет выбрать начальное значение $\theta(0)$ для решения соответствующей краевой задачи. Оно должно быть определено между сепаратрисой, входящей в седловую точку, и терминальным множеством $\operatorname{tg}\theta(T) = a$.

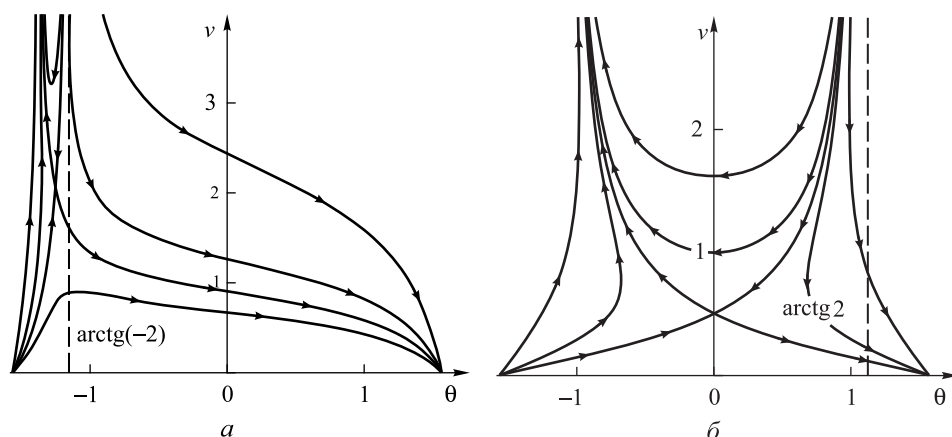


Рис. 4. Фазовый портрет системы (12):
 $a - a = -2$; $b - a = 2$

Для того чтобы определить возможное количество переключений тяги вдоль траектории, рассмотрим систему уравнений, состоящую из первого интеграла системы (12) и уравнения линии переключения:

$$\begin{cases} v \cos \theta + av \sin \theta + (av - vtg\theta)(p - v - \sin \theta) - p^2 = C, \\ p = \frac{-vtg\theta + av}{2}. \end{cases}$$

Выразив скорость из второго уравнения системы и подставив ее в первое уравнение системы, получим:

$$(C - p^2)(a \cos \theta - \sin \theta) + 4p^2 \cos \theta - 2\bar{p} = 0. \quad (15)$$

Выражая тригонометрические функции уравнения (15) через тангенс половинного угла, сводим задачу определения количества переключений тяги вдоль траектории к определению количества решений уравнения:

$$f(t) = ([4 - a]p^2 + 2p + aC)t^2 + 2(C - p^2)t + 2p - aC + (a - 4)p^2 = 0, \quad t = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Это уравнение имеет не более двух решений, принадлежащих интервалу $t \in (-1; 1)$ в зависимости от параметров a , C и \bar{p} . Следовательно, экстремальная траектория в задаче, сформулированной выражениями (4)–(6), состоит из одной дуги (промежуточная тяга), из двух дуг (максимальная — промежуточная) или из трех дуг (промежуточная — максимальная — промежуточная). Такая же последовательность дуг тяги была определена в работе [13] для случая свободной конечной высоты.

Численное моделирование. Результаты численного решения задачи (11) представлены ниже. Для решения задачи (12) значение a было зафиксировано; задача решалась методом стрельбы. Экстремальная тяга для наборов параметров представлена следующим образом:

- из одной дуги, соответствующей промежуточному значению при

$$\bar{p} = 1, T = 1, v(0) = 1, y(T) = 0,17;$$

- из двух дуг (максимальная — промежуточная) при

$$\bar{p} = 0,3, T = 1, v(0) = 1, y(T) = -0,8;$$

- из трех дуг (промежуточная — максимальная — промежуточная) при

$$\bar{p} = 0,33, T = 3, v(0) = 0,3, y(T) = -1,3.$$

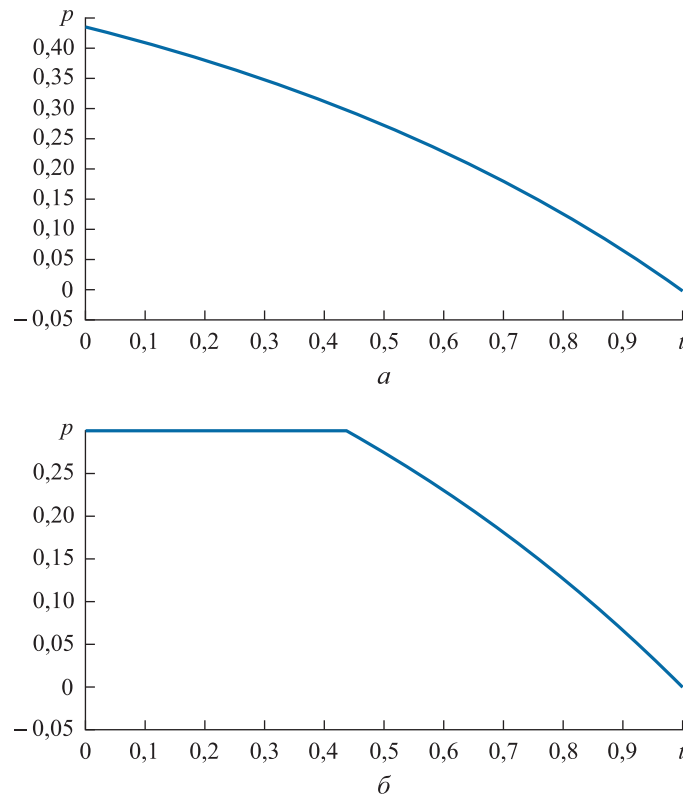


Рис. 5 (начало). Зависимость экстремальной тяги от времени:
 a — одна дуга; b — две дуги

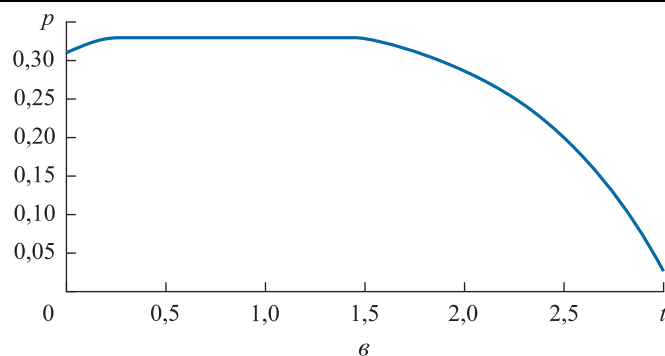


Рис. 5 (окончание). Зависимость экстремальной тяги от времени:
 t — три дуги

На рис. 6 изображены траектории в плоскости (x, y) для различных значений параметра $a = \psi_y(T)$ и $\bar{p} = 1, T = 1, v(0) = 1$.

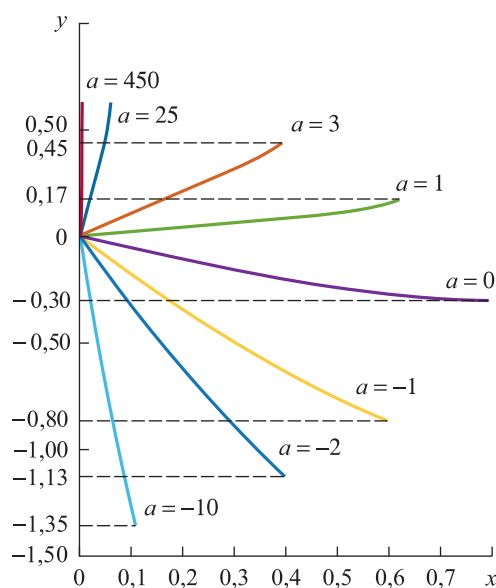


Рис. 6. Графики экстремальных траекторий в плоскости (x, y)
от параметра a

Представленные на рис. 6 графики экстремальных траекторий на плоскости позволяют сделать вывод о том, что имеет место монотонная зависимость параметра a от конечной дальности.

Заключение. Представлен синтез экстремального управления для задачи максимизации горизонтальной дальности со штрафом на расход топлива. Установлено, что управление тягой состоит либо из одной дуги с промежуточным управлением тяги, либо из двух дуг,

начиная с максимальной тяги и заканчивая промежуточной тягой, либо из трех дуг: промежуточная—максимальная—промежуточная. Полученная оптимальная структура тяги совпадает с определенной для случая свободного значения конечной высоты [13], где показано, что тяга состоит не более чем из трех дуг.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tsien H.S., Evans R.C. Optimum thrust programming for a sounding rocket. *Journal of American Rocket Society*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 99–107.
- [2] Menon P.K.A., Kelley H.J., Cliff E.M. Optimal symmetric flight with an intermediate vehicle model. *J. Guidance*, 1985, vol. 8, no. 3, pp. 312–319.
- [3] Vratnar B., Saje M. On the analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33, no. 3, pp. 489–505.
- [4] Hayen J.C. Brachistochrone with Coulomb friction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, no. 40, pp. 1057–1075.
- [5] Salinic S. Contribution to the brachistochrone problem with Coulomb friction. *Acta Mech.*, 2009, vol. 208, pp. 97–115.
- [6] Sumbatov A.S. Brachistochrone with Coulomb friction as the solution of an isoperimetrical variational problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 88, pp. 135–141.
- [7] Chen D., Liao G., Wang J. The Solution of Brachistochrone Problem Based on the Genetic Algorithm. *International Journal of Mechanics Research*, 2015, no. 4, pp. 76–88.
- [8] Thomas V. *The use of variational techniques in the optimization of flight trajectories*. Ph.D. thesis. University of Arizona, Parks, E.K., 1963, pp. 93.
- [9] Drummond J.E., Downes G.L. The Brachistochrone with acceleration: a running track. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1971, vol. 7, no. 6, pp. 444–449.
- [10] Вондрухов А.С., Голубев Ю.Ф. Брахиохрона с разгоняющей силой. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2014, № 6, с. 42–57.
- [11] Вондрухов А.С., Голубев Ю.Ф. Оптимальные траектории в задаче о брахиохроне с разгоняющей силой. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2015, № 3, с. 13–23.
- [12] Зароднюк А.В., Черкасов О.Ю. О максимизации горизонтальной дальности и брахиохроне с разгоняющей силой и вязким трением. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2017, № 4, с. 3–10.
- [13] Cherkasov O.Yu., Zarodnyuk A.V. Optimal controlled descent in the atmosphere and the modified brachistochrone problem. *Preprints, IFAC CAO 2018, Yekaterinburg, Russia, October 15–19*. Yekaterinburg, 2018, pp. 630–635.
- [14] Cherkasov O.Yu., Zarodnyuk A.V., Smirnova N.V. Optimal thrust programming along the brachistochronic trajectory with non-linear drag. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, Freund Publishing House Ltd. (Israel)*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 1–6.
- [15] Зароднюк А.В., Закиров А.Н., Черкасов О.Ю. Управление тягой вдоль брахиохроны при наличии вязкого трения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4 (76). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1758
- [16] Летов А.М. *Динамика полета и управление*. Москва, Наука, 1969, 360 с.
- [17] Kelley H.J. A Transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems. *SIAM Journal of Control*, 1965, no. 2, pp. 234–240.

Статья поступила в редакцию 13.04.2020

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Черкасов О.Ю., Смирнова Н.В. О структуре оптимальной тяги для «промежуточной» модели летательного аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 6. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-6-1991>

Черкасов Олег Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: oyuche@yandex.ru

Смирнова Нина Владимировна — аспирант кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета космических исследований МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: nina.smirnova247@yandex.ru

On the structure of the optimal thrust for the “intermediate” aircraft model

© O.Yu. Cherkasov, N.V. Smirnova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

The paper considers a brachistochrone problem modification including in the objective function a fuel consumption penalty apart from the process time. The material point moves in a vertical plane under gravity, viscous nonlinear friction and traction. The trajectory slope angle and thrust are considered as a control variables. The Pontryagin maximum principle allows reducing the optimal control problem to a boundary value problem for a system of two nonlinear differential equations. Qualitative analysis of the resulting system allows studying the key features of extreme trajectories, including their asymptotic behavior. Extreme thrust control is obtained as a function of the velocity and the trajectory slope angle. The structure of extreme thrust is determined, and the number of switches is analytically determined. The results of numerical solving the boundary value problem are presented, illustrating the analytical conclusions.

Keywords: *brachistochrone, singular control, phase portrait, thrust control*

REFERENCES

- [1] Tsien H.S., Evans R.C. *Journal of American Rocket Society*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 99–107.
- [2] Menon P.K.A., Kelley H.J., Cliff E.M. *AIAA Journal of Guidance*, 1985, vol. 8, no. 3, pp.312–319.
- [3] Vratana B., Saje M. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33, no. 3, pp. 489–505.
- [4] Hayen J.C. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, vol. 40, no. 8, pp. 1057–1075.
- [5] Salinic S. *Acta Mechanica*, 2009, no. 208, pp. 97–115.
- [6] Sumbatov A.S. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 88, no. 1, pp. 135–141.
- [7] Chen D., Liao G., Wang J. *International Journal of Mechanics Research*, 2015, vol. 4, no. 4, pp. 76–88.
- [8] Thomas V. *The use of variational techniques in the optimization of flight trajectories. Ph.D. thesis.* University of Arizona, Parks, E.K., 1963.
- [9] Drummond J.E., Downes G.L. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1971, vol. 7, no. 6, pp. 444–449.
- [10] Vondrukhov A.S., Golubev Yu.F. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 6, pp. 824–838.
- [11] Vondrukhov A.S. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 4, pp. 514–524.
- [12] Zarodnyuk A.V., Cherkasov O.Yu. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, vol. 56, no. 4, pp. 553560.
- [13] Cherkasov O.Yu, Zarodnyuk A.V. Optimal Controlled Descent in the Atmosphere and the Modified Brachistochrone Problem. *Preprints, IFAC CAO 2018.* Yekaterinburg, Russia, October 15–19. 2018, pp. 630–635.
- [14] Cherkasov O., Zarodnyuk A., Smirnova N. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 1–6.

- [15] Zarodnyuk A.V., Zakirov A.N., Cherkasov O.Yu. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1758
- [16] Letov A.M. *Dinamika poleta i upravleniye* [Flight dynamics and control]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 360 p.
- [17] Kelley H.J. A Transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems. *SIAM Journal of Control*, 1965, no. 2, pp. 234–240.

Cherkasov O.Yu., Cand. Sc. (Phys.-and-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics and Control, Lomonosov Moscow State University. Author of over 40 research publications in the field of control and optimization of the dynamical systems.
e-mail: oyuche@yandex.ru

Smirnova N.V., Postgraduate Student, Department of Basic and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University. e-mail: nina.smirnova247@yandex.ru