

## Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами

© С.Т.У. Паинг

Московский авиационный институт, Москва, 125080, Россия

*Рассмотрена задача оптимизации траектории межорбитального полета космического аппарата при фиксированном интервале времени от установленных начальной до конечной орбит с частично заданными элементами в гравитационном поле Земли. Цель оптимизации траектории такого полета заключается в расчете программы управления вектором реактивного ускорения аппарата, обеспечивающей перелет с минимальными затратами характеристической скорости. Для решения задачи оптимизации траектории межорбитального перелета космического аппарата с двигателем ограниченного ускорения, которая сводится к двухточечной краевой, используется принцип максимума Понтрягина. В целях оптимизации свободных элементов конечной орбиты применяются условия трансверсальности, их выполнение обеспечивается при решении двухточечной краевой задачи. Разработан метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту со свободным значением истинной аномалии, долготы восходящего узла и аргумента перигея.*

**Ключевые слова:** *идеально-регулируемый двигатель, двигатель ограниченного ускорения, метод продолжения по параметру, метод продолжения по гравитационному параметру, условия трансверсальности*

**Введение.** Задача вычисления оптимальной траектории межорбитального перелета с двигателем ограниченного ускорения (ДОУ) достаточно сложная. Одной из проблем является выбор начального приближения в целях определения неизвестных параметров краевой задачи, для решения которой необходимо использовать принцип максимума Понтрягина [1]. Показано, что дифференциальные уравнения оптимального движения космического аппарата (КА) с идеально-регулируемым двигателем (ИРД) подразделяются на следующие задачи [2]:

- динамическую;
- параметрическую (зависимость массы КА от времени).

Динамическая часть не зависит от массы КА, и в результате решения определяется оптимальная программа изменения вектора реактивного ускорения. Зависимость массы КА от времени (включая конечную массу КА и требуемые затраты топлива) устанавливается путем решения параметрической задачи, которая сводится к вычислению интеграла от квадрата реактивного ускорения по времени. В [2] рассмотрена только динамическая часть задачи. В этой работе для решения задачи вычисления оптимальной траектории межорбитального перелета КА с ДОУ используется двухстадийный метод:

1 стадия — оптимизируется траектория КА с ИРД [3, 4] с использованием метода продолжения по гравитационному параметру (ППП) с частично заданными краевыми условиями [5–7];

2 стадия — используются в качестве начального приближения начальные значения сопряженных переменных, полученные в результате оптимизации траектории КА с ИРД. Далее реализуется численное продолжение оптимальных траекторий КА с ИРД в КА с ДДУ со ступенчатым изменением ускорения [8–10].

Цель настоящей статьи — рассчитать оптимальную траекторию межорбитального перелета с минимальными затратами характеристической скорости после решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина с частично заданными краевыми условиями [5–7].

**Математическая модель движения космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем.** Рассмотрим возможность использования метода ППП для численного решения задачи оптимального управления движением КА с ИРД [3, 4]. Предполагается, что КА движется в гравитационном поле Земли с силовой функцией

$$\Omega = \frac{\mu}{r},$$

где  $\mu$  — гравитационный параметр Земли;  $r$  — геоцентрическое удаление КА от центра Земли.

Уравнения движения центра масс КА в инерциальной декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}; \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — вектор положения КА;  $\mathbf{a}$  — вектор реактивного ускорения.

В рамках модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности задается только механическая мощность реактивной струи  $P_b$ :

$$P_b = \frac{Tc}{2} = \text{const},$$

где  $T$  — тяга реактивной струи;  $c$  — скорость истечения рабочего тела двигателя.

Значения величин  $T$  и  $c$  в рамках этого ограничения могут изменяться произвольно. При использовании данной модели двигателя задачи минимизации затрат топлива и минимизации интеграла от квадрата реактивного ускорения соответствуют друг другу. Диффе-

ренциальное уравнение для массы КА может быть исключено из рассмотрения при оптимизации траектории. При известной зависимости величины реактивного ускорения от времени зависимость массы КА от времени  $t$  вычисляется по соотношениям:

$$m(t) = \frac{m_0 P_b}{P_b + m_0 J(t)};$$

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2(t) dt.$$

Здесь  $m_0 = m(t_0)$  — масса КА в начальный момент времени  $t_0$ .

Следовательно, задача максимизации массы КА в конечный момент времени  $t_f$  (или минимизации массы топлива) эквивалентна задаче минимизации функционала  $J(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2(t) dt$ .

**Задача оптимизации траектории космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем.** Рассмотрим задачу оптимального управления динамической системой (1) на фиксированном интервале времени  $t \in [t_0, t_f]$  с функционалом

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2 dt. \quad (2)$$

Применяя принципа максимума Понтрягина [1] к задаче (1), (2), получим следующее выражение для гамильтониана:

$$H = -\frac{1}{2} a^2 + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a} + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{p}_x$  — сопряженная переменная к вектору  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{p}_v$  — сопряженная переменная к вектору  $\mathbf{v}$ ;  $a$  — величина реактивного ускорения ( $a = |\mathbf{a}|$ ).

Из условия максимума гамильтониана (3) по управлению  $\mathbf{a}$  оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v.$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) оптимального движения, исходя из принципа максимума Понтрягина, можно представить таким образом:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}, \\ \frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{x}}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{dt} = -\mathbf{p}_{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (4)$$

При использовании модели идеально-регулируемого двигателя в оптимизируемых программах управления происходят изменения трех компонент реактивного ускорения от времени. В рамках рассматриваемой модели эти программы являются непрерывными и гладкими функциями времени, что облегчает решение краевой задачи принципа максимума Понтрягина.

**Двухточечная краевая задача и условия трансверсальности.** После применения принципа максимума Понтрягина задача оптимизации межорбитального полета КА с ИРД сводится к двухточечной краевой задаче, в которой в качестве граничных условий используются:

- начальные значения
  - истинной аномалии;
  - аргумента перигея;
  - долготы восходящего узла;
- начальные и конечные значения
  - фокального параметра;
  - эксцентриситета;
  - наклона.

Конечные значения истинной аномалии, долготы восходящего узла и аргумента перигея КА не фиксированы. Таким образом, систему уравнений (4) следует дополнить граничными условиями:

$$p(t_0) = p_0, \quad e(t_0) = e_0, \quad i(t_0) = i_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad \Omega(t_0) = \Omega_0; \quad (5)$$

$$p(t_f) - p_f = 0, \quad e(t_f) - e_f = 0, \quad i(t_f) - i_f = 0. \quad (6)$$

Здесь  $p$  — фокальный параметр орбиты;  $t_0$  — начальный момент времени;  $e$  — эксцентриситет;  $i$  — наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора;  $v$  — истинная аномалия;  $\omega$  — аргумент перигея;  $\Omega$  — долгота восходящего узла;  $t_f$  — конечный момент времени;  $0$  — элемент на начальной орбите;  $f$  — элемент на конечной орбите.

Для вычисления невязок (6) система ОДУ вида (4) в прямоугольных декартовых координатах интегрируется по заданным начальным

значениям векторов положения и скорости КА, вычисляемых по начальным значениям орбитальных элементов (5). При завершении интегрирования по полученным значениям координат  $\mathbf{x}_f$  и компонент скорости  $\mathbf{v}_f$  КА определяются фактические элементы орбиты  $p(t_f)$ ,  $e(t_f)$ ,  $i(t_f)$  в конечный момент времени.

Конечные значения истинной аномалии, восходящего узла и аргумента перигея не фиксируются и свободны, поэтому краевые условия (5) должны быть дополнены условиями трансверсальности [5–7], которые для случая движения КА в центральном ньютоновском гравитационном поле имеют вид:

$$\mathbf{v}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} = 0; \quad (7)$$

$$\left( \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \mathbf{v}_f \right)^T \mathbf{1}_z = 0; \quad (8)$$

$$\left( \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \mathbf{v}_f \right)^T \left( \mathbf{x}_f \mathbf{v}_f \right) = 0; \quad (9)$$

$$\mathbf{1}_z = [0, 0, 1]^T.$$

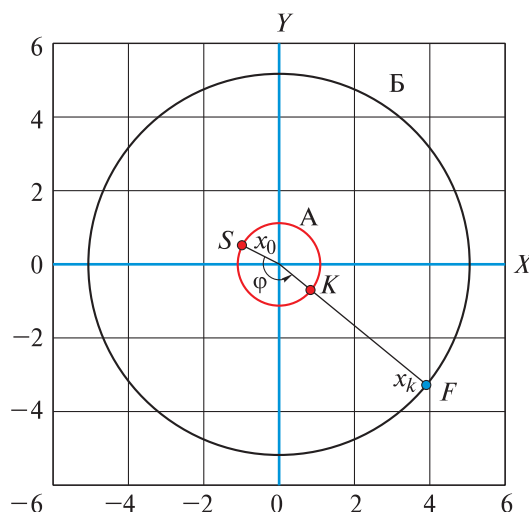
При выполнении с условиями трансверсальности КА попадает в конечную орбиту в конечный момент времени  $t_f$  с оптимальными значениями истинной аномалии, долготы восходящего узла и аргумента перигея.

**Метод продолжения для решения двухточечной краевой задачи.** В статье рассмотрено использование:

- метода продолжения по параметру (ПП);
- метода ППП для решения двухточечной краевой задачи.

Обзор ранних исследований в этой области приведен в [8–10]. Для применения метода ППП (рис. 1) необходимо задать число целых витков КА вокруг притягивающего центра. Этот метод используется благодаря возможности вычисления множества экстремальных решений с разным числом витков, включая глобально-оптимальное решение (решение с оптимальной угловой дальностью).

Метод ПП для решения задачи оптимизации траектории КА с ИРД необходим для получения только локальных экстремальных решений. Однако этот метод удобен для продолжения оптимальной траектории КА с ИРД в оптимальную траекторию с постоянным по величине максимальным реактивным ускорением.



**Рис. 1.** Метод продолжения по гравитационному параметру:

А — начальная орбита; Б — конечная орбита;  $S$  — положение космического аппарата в начальный момент времени;  $K$  — положение космического аппарата в конечный момент времени при условии совершения пассивного движения по начальной орбите;  $F$  — требуемое положение космического аппарата в момент окончания перелета;  $x_k$  — вектор конечного положения космического аппарата в конечный момент времени при  $t_f = t_0 + T$ ;  $x_0$  — вектор начального положения космического аппарата в начальный момент времени  $t = t_0$ ;  $\varphi$  — угол между вектором начального положения  $x_0$  и проекцией вектора конечного положения  $x_k$  на плоскость начальной орбиты

Примем, что гравитационный параметр Земли  $\mu_0$  является линейной функцией параметра продолжения  $\tau$ . При  $\tau = 0$  начальное значение гравитационного параметра  $\mu_0$  определим из заданных в исходных данных угловой дальности перелета, при  $\tau = 1$  гравитационный параметр Земли  $\mu_0$  равен действительному физическому значению ( $\mu_0 = 1$  для уравнений в безразмерных координатах). Выбор  $\mu_0$  зависит от пассивного движения КА по начальной орбите. Пусть начальное значение истинной аномалии КА в точке  $S$  равно  $v_0$ , конечное значение истинной аномалии в точке  $K$ :

$$v_k = v_0 + \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между вектором начального положения КА  $x_0$  и проекцией вектора конечного положения КА  $x_k$  на плоскость начальной орбиты.

Определить соответствующие значения средней аномалии  $M_0$  и  $M_k$  можно, используя эксцентриситет  $e$  начальной орбиты, истинные аномалии  $v_0$  и  $v_k$ :

$$M = E - e \sin E,$$

где  $E$  — эксцентрисическая аномалия,

$$E = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^{0,5} \operatorname{tg} \left( \frac{v}{2} \right) \right\}.$$

Средняя аномалия — линейная функция времени на кеплеровской орбите, рассчитывается по формуле

$$M = M_0 + n(t - t_0),$$

где  $n = (\mu_0 / a^3)^{0,5}$  — среднее движение КА;  $a$  — большая полуось начальной орбиты.

Следовательно, для того чтобы КА оказался в точке  $K$  за время  $T$ , необходимо выполнить равенство

$$M_k - M_0 + 2\pi N_r = nT,$$

где  $N_r$  — число полных оборотов КА вокруг центрального тела (Земли), которые КА должен совершить за время  $T$ , прежде чем КА попадет в точку  $K$  в конечное время.

Начальное значение гравитационного параметра Земли  $\mu_0$  можно определить по формуле

$$\mu_0 = \left[ \frac{M_k + 2\pi N_r - M_0}{T} \right]^2 a^3. \quad (10)$$

Введем зависимость гравитационного параметра  $\mu$  от параметра продолжения  $\tau$ :

$$\mu(\tau) = \mu_0 + (1 - \mu_0)\tau. \quad (11)$$

При  $\tau = 1$  в соответствии с зависимостью (11) гравитационный параметр  $\mu = 1$ . Уравнение (11) для гравитационного параметра должно быть введено в систему (4) краевой задачи, при этом уравнения оптимального движения КА примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}, \\ \frac{dp_{\mathbf{x}}}{dt} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}}p_{\mathbf{v}}, \\ \frac{dp_{\mathbf{v}}}{dt} = -p_{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (12)$$

Необходимо учесть изменение орбитальной скорости КА при изменении гравитационного параметра, чтобы начальная и конечная орбиты КА были инвариантны относительно преобразования  $\mu(\tau)$ .

Для этого соответствующим образом масштабируется скорость  $\mathbf{v}(t, \tau)$  точки, движущейся по начальной и конечной орбите, и граничные условия определяются следующим образом:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{v}(t_0) = \sqrt{\mu(\tau)} \mathbf{v}_0;$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \mathbf{v}(t_f) = \sqrt{\mu(\tau)} \mathbf{v}_f.$$

Если часть системы ОДУ оптимального движения (справа) и граничные условия не зависят от параметра продолжения  $\tau$ , конечные граничные условия двухточечной краевой задачи можно представить в виде нелинейной системы уравнений:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0; \tag{13}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{p}_{\mathbf{x}_0}^T, \mathbf{p}_{\mathbf{v}_0}^T)^T.$$

Здесь  $\mathbf{f}$  — функция невязок;  $\mathbf{z}$  — вектор неизвестных параметров краевой задачи.

Функция невязок  $\mathbf{f}$  рассчитывается по формулам (6)–(9). Рассмотрим некоторое начальное приближение  $\mathbf{z}_0$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b} \neq 0,$$

и погружение системы (13) в однопараметрическое семейство:

$$\mathbf{f}[\mathbf{z}(\tau)] = (1 - \tau)\mathbf{b}, \tag{14}$$

где  $\tau \in [0; 1]$  — параметр продолжения.

Дифференцирование (13) относительно  $\tau$  приводит к дифференциальному уравнению метода ПП:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{b}. \tag{15}$$

Для применения этого метода необходимо существование и невырожденность матрицы частных производных  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$  на всем интервале продолжения  $\tau \in [0; 1]$ . В некоторых случаях (при применении ПП) целесообразно введение параметра продолжения  $\tau$  в правую часть дифференциальных уравнений движения и краевые условия. Тогда функция невязок  $\mathbf{f}$  зависит от параметра продолжения  $\tau$ , дифференциальные уравнения метода ПП примут вид



$$\frac{dz}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right). \quad (16)$$

В целях получения решения  $\mathbf{z}$  необходимо проинтегрировать уравнения (15) или (16) по параметру  $\tau$  на отрезке от 0 до 1. Для определения показателей, расположенных в правой части дифференциальных уравнений (15) и (16), требуется вычислить частные производные от вектора невязок  $\mathbf{f}$  по заданным начальным значениям сопряженных переменных  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ . Для нахождения этих производных используется метод комплексного шага [11].

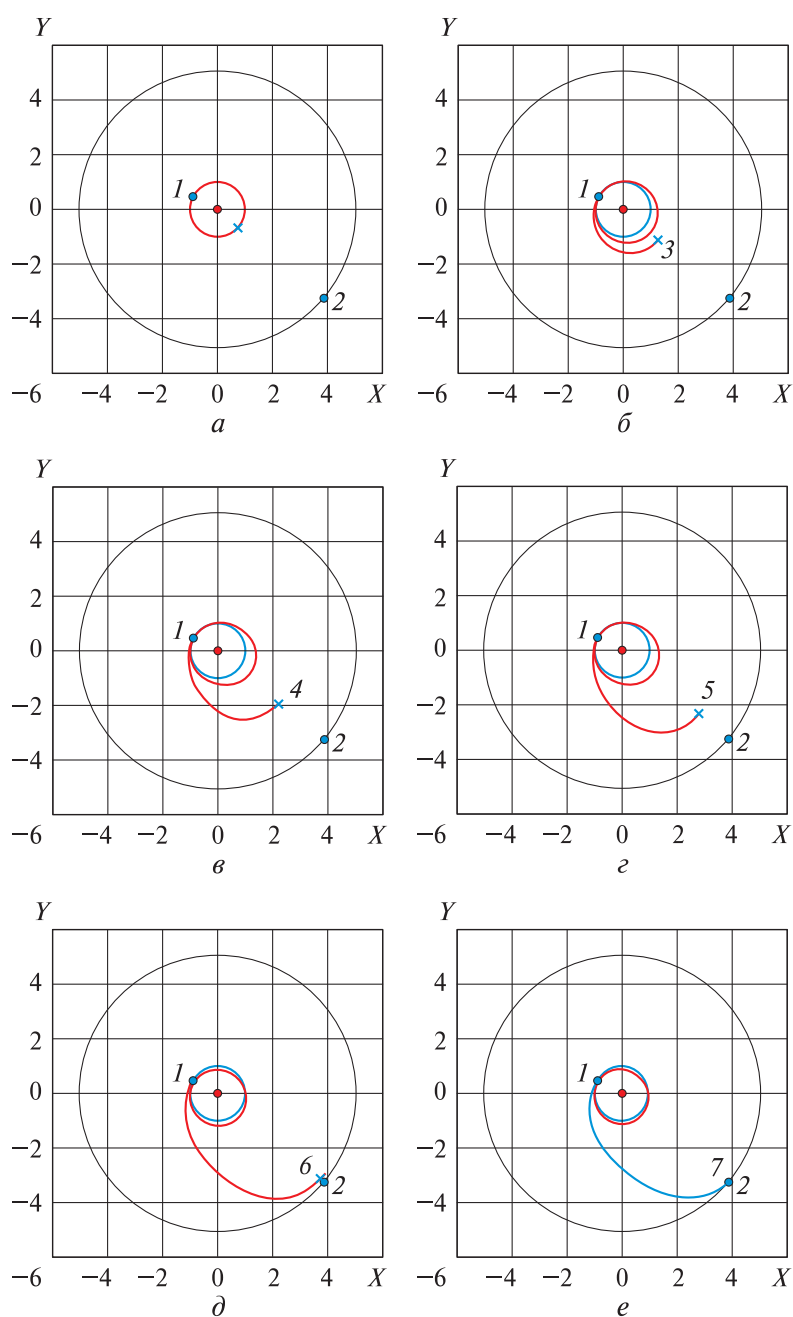
Выражение для функции невязок в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p(t_f) - p_f \\ e(t_f) - e_f \\ i(t_f) - i_f \\ \mathbf{v}_f^T \mathbf{p}_{x_f} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}_f^T \mathbf{p}_{v_f} \\ \left(\mathbf{p}_{x_f} \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{v_f} \mathbf{v}_f\right)^T \mathbf{1}_z \\ \left(\mathbf{p}_{x_f} \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{v_f} \mathbf{v}_f\right)^T \left(\mathbf{x}_f \mathbf{v}_f\right) \end{pmatrix}.$$

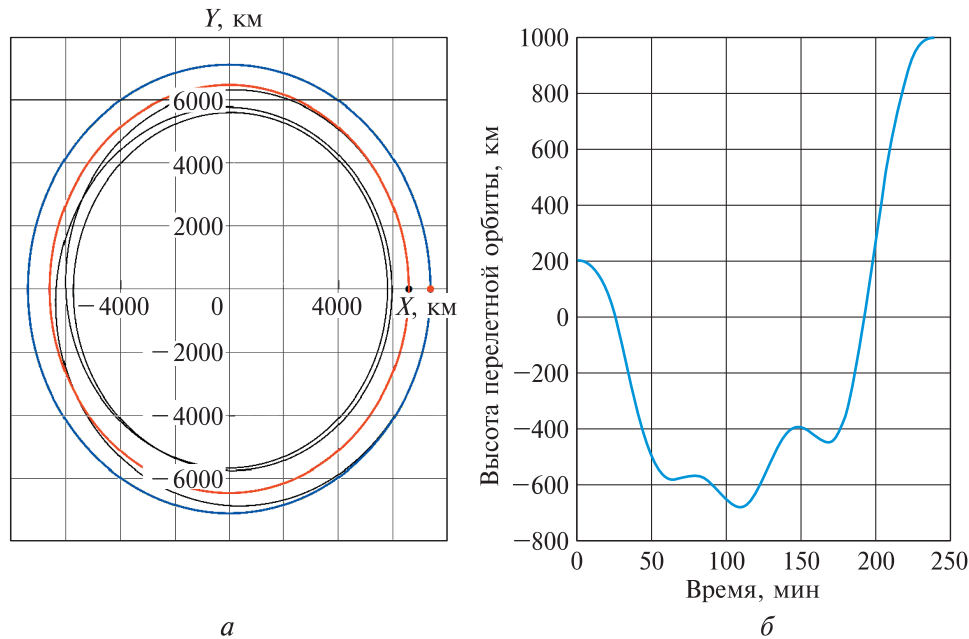
Для вычисления  $\mathbf{f}$  необходимо численно проинтегрировать систему уравнений оптимального движения (12) с текущими значениями  $\mathbf{z}$  и  $\tau$ . В качестве начального приближения для неизвестных сопряженных переменных  $\mathbf{p}_x$  и  $\mathbf{p}_v$  в задаче оптимизации траектории КА с ИРД рассмотрено нулевое приближение  $\mathbf{z}_0 = 0$ , которому соответствует пассивное движение КА по начальной орбите.

На рис. 2 представлена серия траекторий КА, образованных при интегрировании системы (16) методом ППП при увеличении параметра продолжения  $\tau$  от 0 до 1.

Использование ППП позволяет за счет выбора целого числа витков устранить некоторые недостатки, свойственные методу продолжения по параметру. Так, на рис. 3 показана траектория, полученная с использованием метода ПП, которая частично проходит внутри Земли и поэтому практически не может быть реализована. Применяя метод ППП и выбирая время и угловую дальность перелета, можно найти оптимальную траекторию с заданной минимальной высотой полета.



**Рис. 2.** Траектории космического аппарата при увеличении значения  $\tau$  от 0 до 1 с использованием метода продолжения по гравитационному параметру:  $a$  —  $\tau = 0,0000$ ;  $b$  —  $\tau = 0,1700$ ;  $в$  —  $\tau = 0,4661$ ;  $г$  —  $\tau = 0,6484$ ;  $д$  —  $\tau = 0,9609$ ;  $e$  —  $\tau = 1$ ; 1 — точка отправления; 2 — точка назначения; 3–6 — траектории при  $0 < \tau < 1$ ; 7 — точка прибытия



**Рис. 3.** Недостатки применения метода продолжения по параметру для задачи оптимизации траектории космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем: *a* — проекция траектории на плоскость экватора; *б* — зависимости от времени высоты перелетной орбиты; • — точка отправления; • — точка прибытия; — — перелетная орбита; — — начальная орбита; — — конечная орбита

В настоящей статье метод ППП используется в системе уравнений оптимального движения (13) с соответствующими краевыми условиями (6)–(9) для решения задачи оптимизации траектории КА с ИРД. Метод ППП применяется для решения задачи оптимизации траектории КА с ДООУ.

**Математическая модель движения космического аппарата с двигателем ограниченного ускорения.** Рассмотрим возможности использования метода продолжения гравитационного параметра для численного решения задачи оптимального управления движением КА с ДООУ. Космический аппарат движется в гравитационном поле Земли с силовой функцией  $\Omega$ . Уравнения движения центра масс КА в инерциальной декартовой системе координат можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{v}; \\ \frac{dv}{dt} &= \Omega_x + a\delta\mathbf{e}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь  $a$  — ограниченное ускорение;  $\delta$  — функции тяги;  $\mathbf{e}$  — единичный вектор в направлении действия ускорения.

В данной математической модели реактивное ускорение принимается постоянным.

**Задача оптимизации траектории космического аппарата с двигателем ограниченного ускорения.** При использовании модели ДОУ используются оптимизируемые программы управления:

- изменения ориентации вектора реактивного ускорения;
- включения / выключения двигателя.

Рассмотрим задачу минимизации характеристической скорости:

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f} a \delta dt. \quad (18)$$

Применяя при решении задачи принцип максимума Понтрягина и уравнения (17), (18), получаем следующее выражение для гамильтониана:

$$H = -\delta a + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \delta a \mathbf{p}_v^T \mathbf{e}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{p}_x$  — сопряженная переменная к вектору  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{p}_v$  — сопряженная переменная к вектору  $\mathbf{v}$ .

Оптимальное управление определяется из условия максимума гамильтониана (19):

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}; \\ \delta &= \begin{cases} 1, & \psi > 0, \\ 0, & \psi \leq 0; \end{cases} \\ \psi &= p_v - 1. \end{aligned}$$

Здесь  $\psi$  — функция переключения.

Система ОДУ оптимального движения в соответствии с принципом максимума Понтрягина примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_x + \frac{a\delta}{p_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\Omega_{xx} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x. \end{cases} \quad (20)$$

Краевые условия типовой задачи оптимизации траектории КА с ДОУ совпадают с вариантами краевых условий (6)–(9) задачи оптимизации траектории КА с ИРД.

**Гомотопия между задачами оптимизации траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем и двигателем ограниченного ускорения.** Предложена следующая система ОДУ движения КА, реализующая гомотопию между задачами оптимизации траекторий КА с ИРД и ДОУ:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \frac{(1-\tau) + \tau a \delta}{(1-\tau) + \tau p_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x. \end{cases} \quad (21)$$

Продолжая решение этой задачи, необходимо осуществить гладкую аппроксимацию релейной функции тяги  $\delta$ , причем сглаженная функция тяги должна быть близка к ступенчатой функции  $\delta(\psi)$  при  $\tau = 1$ . Для такой аппроксимации функции тяги используем выражение

$$\delta = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{\psi}{\varepsilon} \right) \right); \quad (22)$$

$$\psi = p_v - (1-\tau)a + \tau. \quad (23)$$

Здесь  $\varepsilon = 0,001$ .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (21) зависит от параметра  $\tau \in [0; 1]$ :

- при  $\tau = 0$  обыкновенные дифференциальные уравнения (21) соответствуют ОДУ для КА с ИРД (4);
- при  $\tau = 1$  — системе ОДУ для КА с ДОУ (20).

В качестве начального приближения для начальных значений сопряженных переменных используются значения из решения задачи оптимизации траектории КА с ИРД.

**Численные примеры.** Рассмотрим некоторые примеры оптимизации траектории перелета КА, выполненной с использованием описанных выше методов. Такая траектория перелета КА между некопланарными эллиптическими орбитами [12] с ДОУ с заданной начальной орбиты на конечную орбиту с частично заданными орбитальными элементами или фиксированными орбитальными элементами проводится, учитывая следующие параметры.

*Начальная орбита*

Высота перицентра, км	.....	400
Высота апоцентра, км	.....	600
Наклонение, град	.....	51
Аргумент перицентра, град	.....	30
Истинная аномалия, град	.....	120
Долгота восходящего узла, град	.....	328

*Конечная орбита*

Высота перицентра, км	.....	800
Высота апоцентра, км	.....	1500
Наклонение, град	.....	20
Аргумент перицентра, град	} Свободные значения	
Истинная аномалия, град		
Долгота восходящего узла, град		

*Орбитальные элементы*

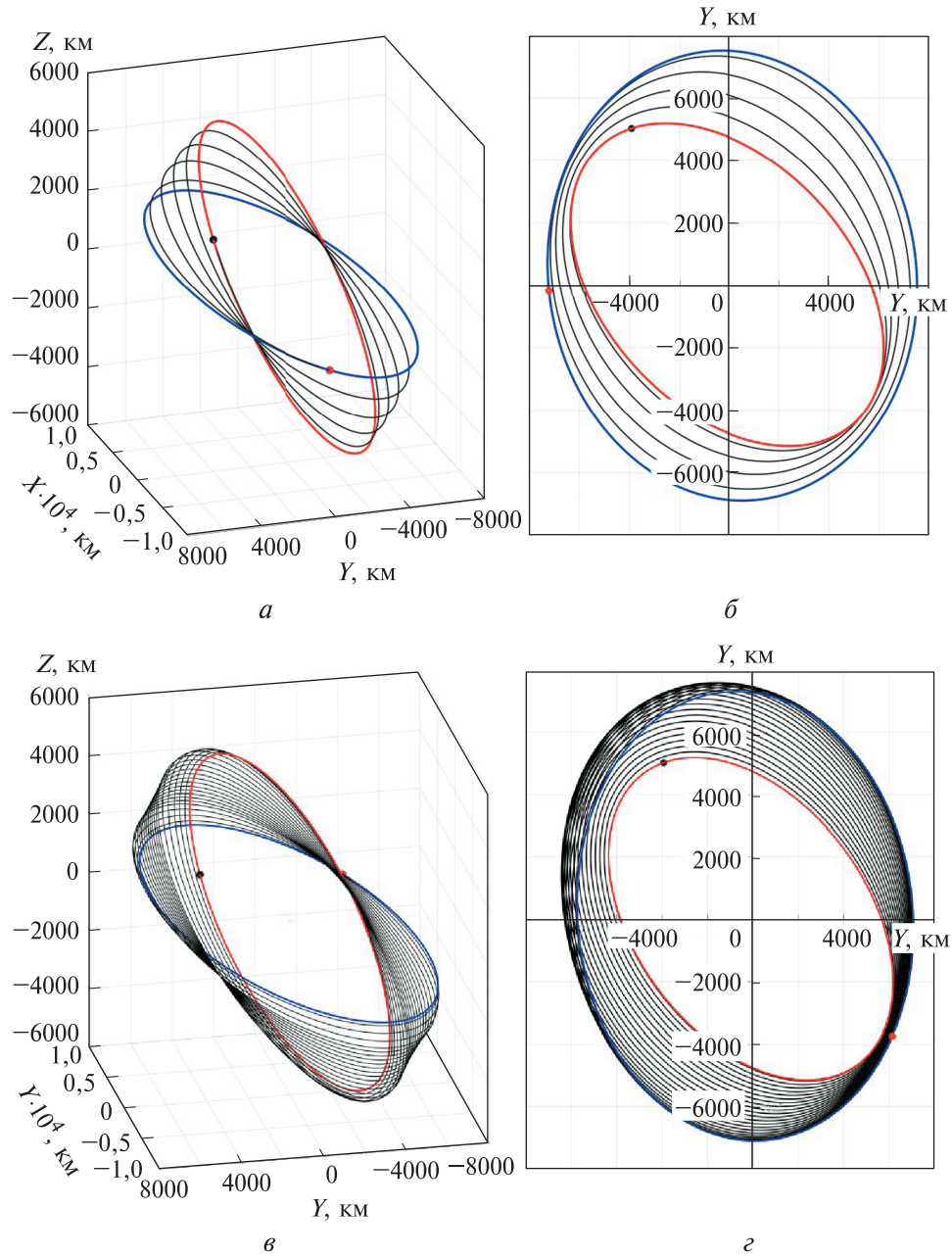
Высота перицентра, км	.....	800
Высота апоцентра, км	.....	1500
Наклонение, град	.....	20
Аргумент перицентра, град	.....	35
Истинная аномалия, град	.....	200
Долгота восходящего узла, град	.....	328

Тесты проводились в программном комплексе MATLAB+Fortran на персональном компьютере с центральными процессорами Intel Core i3, работающими на частоте 3,30 ГГц в операционной системе Microsoft Windows 7. Сравнение основных параметров оптимальных траекторий перелета на конечную орбиту с частично заданными и фиксированными орбитальными элементами приведено в таблице.

**Результаты оптимизации траектории доведения низкоорбитального космического аппарата на целевую орбиту**

Условия	Число витков, шт.	Время, мин	Характеристическая скорость, км/с	Реактивное ускорение, мм/с <sup>2</sup>	Процессное время, с
Частично свободные конечные условия	4	7	4,5337	323	17,3
Фиксированные конечные условия	4	7	4,5435	323	60,6
Частично свободные конечные условия	20	39	3,9629	128	87,2
Фиксированные конечные условия	20	39	4,0284	128	609,3

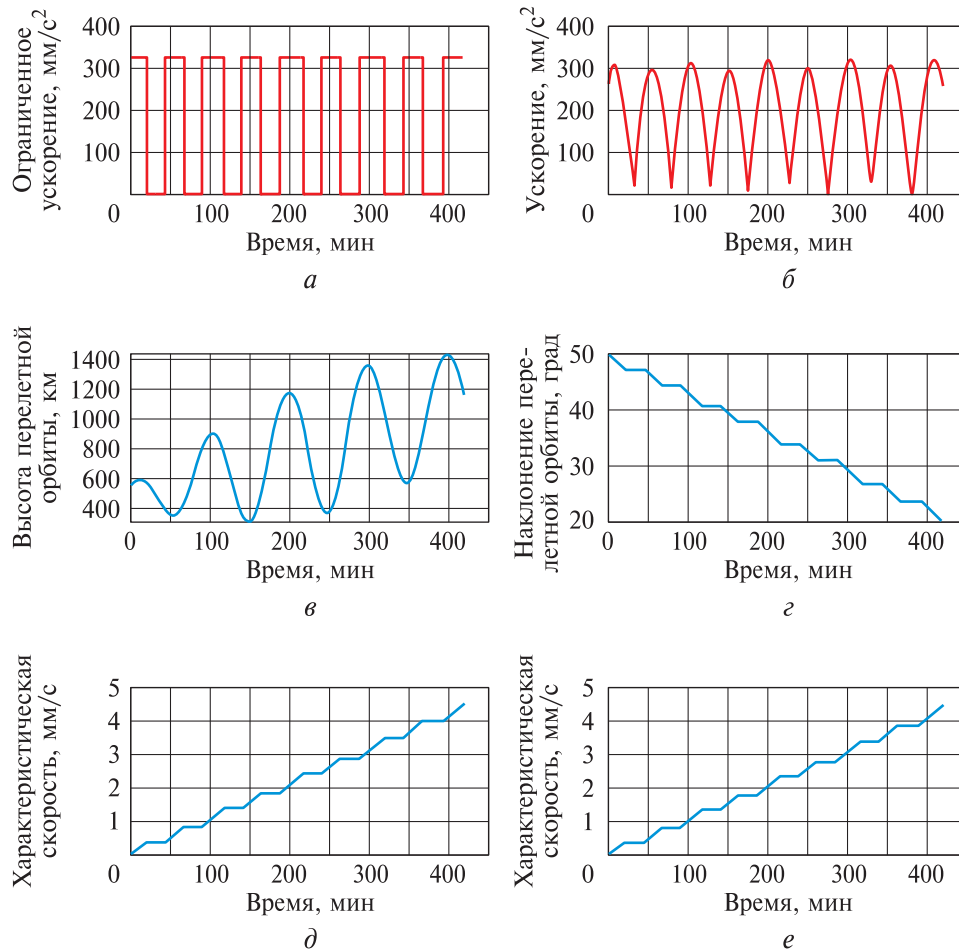
На рис. 4 представлен вид оптимальной траектории перелета КА с ДОУ на конечную орбиту с частично заданными параметрами.



**Рис. 4.** Оптимальная траектория космического аппарата с двигателем ограниченного ускорения с частично свободными конечными условиями:

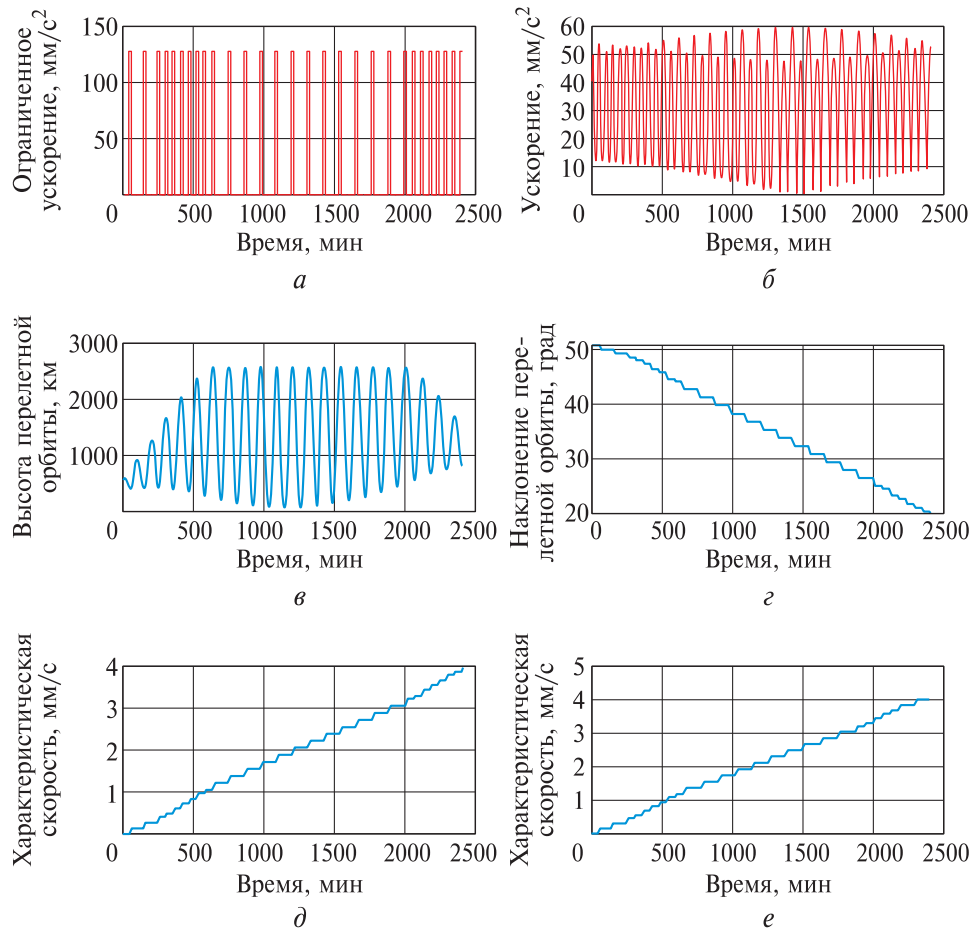
*a* — пространственный вид траектории; *б* — проекция траектории на плоскость экватора; *в* — пространственный вид траектории; *г* — проекция траектории на плоскость экватора; • — точка отправления; • — точка прибытия; — — перелетная орбита; — — начальная орбита; — — конечная орбита

На рис. 5 и 6 представлены зависимости параметров от времени для КА с ДОУ и ИРД, соответственно, при перелете на конечную орбиту с частично заданными параметрами.



**Рис. 5.** Зависимость от времени для оптимальной траектории выведения низко-орбитального космического аппарата на целевую орбиту с 4 витками вокруг Земли: *a, б* — зависимость ускорения от времени; *в, г* — зависимость высоты и наклона-ния от времени; *д* — зависимость характеристической скорости от времени при перелете КА с ДОУ на орбиту с частично заданными параметрами; *е* — зависимость характеристической скорости от времени при перелете КА с ДОУ с частично заданными параметрами на фиксированную конечную орбиту





**Рис. 6.** Зависимость от времени для оптимальной траектории выведения низко-орбитального космического аппарата на целевую орбиту с 20 витками вокруг Земли: *a, б* — зависимость ускорения от времени; *в, г* — зависимость высоты и наклона от времени; *д* — зависимость характеристической скорости от времени при перелете КА с ДОУ на орбиту с частично заданными параметрами; *е* — зависимость характеристической скорости от времени при перелете КА с ДОУ с частично заданными параметрами на фиксированную конечную орбиту

Можно сделать вывод, что с частично заданными краевыми условиями характеристическая скорость уменьшается.

**Заключение.** Разработана математическая модель движения КА в центральном гравитационном поле Земли и поставлена задача оптимизации межорбитального перелета КА с ДОУ с использованием принципа максимума Понтрягина. В рамках рассматриваемой математической модели реактивное ускорение принимается постоянным. Такая математическая модель применима для моделирования траекторий КА с электроракетной двигательной установкой в случае малого расхода рабочего тела в процессе перелета.

Рассмотрена задача выбора оптимального управления, обеспечивающего минимум затрат характеристической скорости на перелет в заданный интервал времени между двумя определенными орбитами в фазовом пространстве. С помощью принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления была сведена к двухточечной краевой задаче для системы ОДУ. Для решения этой краевой задачи требуется найти начальные условия для сопряженных переменных к векторам положения и скорости КА, при которых удовлетворяются заданные конечные условия.

Для решения краевой задачи используется двухстадийный метод. Сначала решается задача оптимизации траектории КА с ИРД с использованием метода ППП. В рамках рассматриваемой задачи оптимизации траектории КА с ИРД программа изменения вектора реактивного ускорения выбирается оптимальной для минимизации интеграла от квадрата величины реактивного ускорения. Полученные в результате оптимизации траектории КА с ИРД начальные значения сопряженных переменных используются в качестве начального приближения на второй стадии, которая реализует численное продолжение оптимальных траекторий КА с ИРД в КА с ДОУ со ступенчатым изменением реактивного ускорения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Наука, 1983, 392 с.
- [2] Irving J.H. Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields. *Space Technology*, 1959, vol. 10, no. 4, pp. 10-01–10-54.
- [3] Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. *Космические исследования*, 2008, т. 46, № 3, с. 224–237.
- [4] Петухов В.Г., Паинг С.Т.У. Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета с идеально-регулируемым двигателем малой тяги. *Известия Российской академии наук. Энергетика*, 2019, № 3, с. 140–154.
- [5] Константинов М.С., Мин Тейн. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту. *Труды МАИ*, 2013, вып. 67.  
URL: <https://mai.ru/upload/iblock/465/46523a0c7696f695b94b6cc75cea7e18.pdf> (дата обращения 02.03.2020).
- [6] Izzo D., Sprague C.I., Tailor D.V. Machine learning and evolutionary techniques in interplanetary trajectory design. *Modeling and Optimization in Space Engineering*, 2019, vol. 144, pp. 191–210. DOI:10.1007/978-3-030-10501-3\_8
- [7] Pan B., Chen Z., Lu P., Gao B. Reduced transversality conditions in optimal space trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, vol. 36, no. 5, pp. 1289–1300. DOI: 10.2514/1.60181
- [8] Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. *Космические исследования*, 2012, т. 50, № 3, с. 258–270.
- [9] Petukhov V.G. Application of the angular independent variable and its regularizing transformation in the problems of optimizing low-thrust trajectories. *Cosmic research*, 2019, vol. 57, no. 5, pp. 351–363.

- [10] Петухов В.Г. *Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения*. Дис. ... д-ра техн. наук. Москва, МАИ, 2013, 223 с.
- [11] Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J. The complex-step derivative approximation. *ACM Transaction on Mathematical Software*, 2003, vol. 29, no. 3, pp. 245–262.
- [12] Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. *Космические исследования*, 2004, т. 42, № 3, с. 260–279.

Статья поступила в редакцию 23.03.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Паинг С.Т.У. Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 9. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-9-2017>

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XLIV Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства (Королёвские чтения — 2020), Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 28–31 января 2020 г.*

**Паинг Сое Ту У** — аспирант Московского авиационного института.  
e-mail: paingsoethuoo53@gmail.com, paingsoethuoomandalay@yandex.ru

## Method for optimizing the flight path to the final orbit with partially specified elements

© Paing Soe Thu Oo

Moscow Aviation Institute, Moscow, 125080, Russia

*The paper focuses on the problem of optimizing the interorbital flight of a spacecraft (SC) at a fixed time interval from a given initial orbit to a final orbit with partially given elements in the Earth's gravitational field. The optimization goal is to calculate the program for controlling the spacecraft reactive acceleration vector, which ensures such a flight with the minimum relative velocity. The magnitude of the reactive acceleration is assumed to be constant, the reactive acceleration vector orientation program and the program of its on-off are optimized. To solve the problem of trajectory optimization, an approach based on Pontryagin's maximum principle is proposed. Using the maximum principle, the problem of optimizing the interorbital flight of a spacecraft with a limited acceleration engine is reduced to a two-point boundary value problem. To optimize the free elements of the finite orbit, transversality conditions are used and these conditions are met when solving the boundary value problem. A method has been developed to optimize the trajectory of a transfer to the final orbit with a free value of the true anomaly, longitude of the ascending node and the pericenter argument.*

**Keywords:** ideally controlled engine, limited acceleration engine, continuation method, gravitational parameter continuation method, transversality conditions

### REFERENCES

- [1] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1976.
- [2] Irving J.H. Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields. *Space Technology*, 1959, vol. 10, no. 4, pp. 10-01–10-54.
- [3] Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2008, vol. 46, no. 3, pp. 224–237.
- [4] Petukhov V.G., Paing S.T.O. *Izvestiya RAN. Energetika (Proceedings of RAS. Energetics)*, 2019, no. 3, pp. 140–154.
- [5] Konstantinov M.S., Min Teyn. *Trudy MAI (Proceedings of MAI)*, 2013, no. 67. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41510>
- [6] Izzo D., Sprague C.I., Tailor D.V. Machine Learning and Evolutionary Techniques in Interplanetary Trajectory Design. In: Fasano G., Pintér J., eds. *Modeling and Optimization in Space Engineering*. Springer Optimization and Its Applications, 2019, vol. 144, pp. 191–210. Springer, Cham.
- [7] Binfeng Pan, Zheng Chen, Ping Lu, Bo Gao. Reduced Transversality Conditions in Optimal Space Trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, vol. 36, no. 5, pp. 1289–1300. DOI: 10.2514/1.60181
- [8] Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2012, vol. 50, no. 3, pp. 258–270.
- [9] Petukhov V.G. Application of the angular independent variable and its regularizing transformation in the problems of optimizing low-thrust trajectories. *Cosmic research*, 2019, vol. 57, no. 5, pp. 351–363.

- [10] Petukhov V.G. *Optimizatsiya traektorii kosmicheskikh apparatov s elektro-raketnymi dvigatelnyimi ustanovkami metodom prodolzheniya*. Diss....dokt. tekhn. nauk [Optimization of trajectories of spacecraft with electric propulsion systems by the continuation method. Dr. Eng. Sc. Diss.]. Moscow, MAI Publ., 2013.
- [11] Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2004, vol. 42, no. 3, pp. 260–279.
- [12] Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J. The complex-step derivative approximation. *ACM Transaction on Mathematical Software*, 2003, vol. 29, no. 3, pp. 245–262.

**Paing S.T.O.**, post-graduate student, Moscow Aviation Institute. Research interests: dynamics, astrodynamics, spacecraft motion control.  
e-mail: paingsoethuoo53@gmail.com