

**Рекуррентно-итерационный алгоритм
синтеза управления терминальной переориентацией
космического аппарата на основе метода
аналитического конструирования
оптимальных регуляторов**

© О.Д. Пушкарь

Центральный научно-исследовательский институт машиностроения,
г. Королёв Московской области, 141070, Россия

Применение метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов рассмотрено в формулировке А.А. Красовского для синтеза управления переориентацией космического аппарата из произвольного углового положения в заданную ориентацию в течение фиксированного интервала времени. В качестве численной реализации метода аналитического конструирования по критерию обобщенной работы выбран алгоритм с прогнозирующей моделью. Для того чтобы провести экспериментальные исследования методов оптимизации углового движения, была разработана и реализована на языке С# модель процесса управления переориентацией космического аппарата. Численные эксперименты показали, что исходный алгоритм не обеспечивает заданную точность конечной ориентации, а увеличение весовых коэффициентов в терминальном члене функционала с целью уменьшить ошибки ориентации приводит к потере устойчивости динамического процесса. Предложена модификация алгоритма с прогнозирующей моделью — рекуррентно-итерационный алгоритм решения задачи точной терминальной переориентации космического аппарата. Используемый в данном случае подход заключается в организации итерационной процедуры синтеза оптимального управления переориентацией космического аппарата на основе алгоритма с прогнозирующей моделью. Рассчитанное на каждой итерации оптимальное управление используется на следующем шаге итерационной процедуры в качестве очередной аддитивной составляющей программного управления. Численные эксперименты показали, что рекуррентно-итерационный метод решения задачи переориентации космического аппарата обеспечивает устойчивость углового движения и заданную точность конечной ориентации в широком диапазоне граничных условий. Область применения предложенного алгоритма ограничена объектами управления с непрерывной характеристикой исполнительных органов. Примером такого объекта управления является спутник дистанционного зондирования Земли с силовыми гироскопами (гиродинами) в системе ориентации.

Ключевые слова: переориентация космического аппарата, оптимальное управление, рекуррентно-итерационный метод, прогнозирующая модель

Введение. Терминальная переориентация космического аппарата (КА) — это пространственный разворот КА в течение заранее заданного времени из произвольных начальных условий в конечное состояние с предварительно заданной ориентацией. Такой вид угловых маневров применяется, например, в процессе съемок земной повер-

ности спутниками дистанционного зондирования Земли, когда время разворота ограничено, с одной стороны, началом следующего сеанса съемки, а с другой — возможностями исполнительных органов системы ориентации или максимально допустимым значением угловой скорости переориентации. При этом решение задачи переориентации получается, как правило, для частных случаев.

Аналитическое решение задачи определения программных значений компонент вектора угловой скорости при терминальном пространственном развороте КА приведено в работах [1, 2] для кинематических уравнений движения КА вокруг центра масс. В целях получения аналитического решения задача терминального управления переориентацией сведена к определению постоянных значений компонент вектора угловой скорости, обеспечивающих переориентацию в течение заданного времени.

В работе [3] решение задачи оптимизации программы терминальной переориентации КА получено на основе использования принципа максимума Понтрягина. Определены расчетные выражения для оптимальной по минимуму энергетических затрат программы разворота. Полное решение задачи переориентации в замкнутой форме получено для динамически симметричного КА.

Пути решения задачи управления переориентацией КА в различных режимах съемки поверхности Земли при использовании в качестве исполнительных органов системы двухстепенных гироскопов — гироскопов рассмотрены в работе [4]. При выполнении углового маневра разворот происходит вокруг вектора оси эквивалентного вращения Эйлера за минимальное время, что обеспечивается созданием максимального ускорения, которое могут развивать гироскопы в направлении вектора конечного поворота с использованием информации об области располагаемого управляющего момента.

В статье [5] предложено решение задачи управления переориентацией КА за фиксированное время при наличии внешних возмущений и неточной информации о моментах инерции КА.

Постановка задачи терминальной переориентации космического аппарата. Движение космического аппарата вокруг своего центра масс описывается динамическими уравнениями Эйлера, которые в компонентной форме имеют вид

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 + u_1; \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 + u_2; \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 + u_3, \end{cases} \quad (1)$$

где J_1, J_2, J_3 — главные моменты инерции; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции угловой скорости вращения на связанные оси; u_1, u_2, u_3 — проекции управляющих моментов на связанные оси.

Для описания процесса разворота твердого тела как пространственного движения использован математический аппарат кватернионов [6]. Пусть Λ — кватернион, задающий ориентацию связанной с КА системы координат относительно опорного базиса — инерциальной системы координат. Тогда кинематическое уравнение, описывающее связь вектора угловой скорости ω и кватерниона Λ , записывается следующим образом:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — компоненты кватерниона Λ .

В компонентной форме динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3; \\ 2\dot{\lambda}_1 = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3; \\ 2\dot{\lambda}_2 = \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1; \\ 2\dot{\lambda}_3 = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2. \end{cases} \quad (2)$$

При нормировании кватерниона Λ ($\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$) можно перейти от четырех кинематических уравнений к трем — для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, причем λ_0 определяется из условия нормировки.

Модель движения, используемая в процедуре расчета оптимального управления, содержит следующие упрощения: объект считается абсолютно твердым телом, оси эллипсоида инерции совпадают с осями связанной системы координат — центробежные моменты инерции равны нулю ($J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$).

В векторном виде уравнения движения объекта записываются следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Phi \mathbf{u}, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ — вектор состояния; Φ — матрица размером 6×6 , в которой ненулевыми являются лишь три диагональных элемента: $\Phi_{11} = J_1^{-1}$; $\Phi_{22} = J_2^{-1}$; $\Phi_{33} = J_3^{-1}$; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)^T$ — вектор управляющих моментов.

Задача управления без потери общности может быть сформулирована следующим образом: перевод КА из произвольного состояния $\mathbf{x}(t_0) = (\omega_1(t_0), \omega_2(t_0), \omega_3(t_0), \lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0), \lambda_3(t_0))^T$ до совмещения связанного базиса с опорным базисом, задающим конечную ориентацию в момент времени t_k , при нулевом векторе угловой скорости $\mathbf{x}(t_k) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, или $\Lambda(t_k) = (1, 0, 0, 0)$; $\omega(t_k) = (0, 0, 0)$.

Метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов в формулировке А.А. Красовского. Поставленная задача решается методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в формулировке А.А. Красовского [7], что предполагает выбор полуопределенного функционала обобщенной работы как критерия качества процесса переориентации:

$$I = V_3(\mathbf{x}(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} Q_3(\mathbf{x}(t)) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{u}^T(t) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_{\text{опт}}^T(t) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{\text{опт}}(t)) dt, \quad (4)$$

где $[t_0, t_k]$ — интервал оптимизации; \mathbf{u} — вектор управления; $\mathbf{K}^{-1} = \text{diag}(k_1^{-1}, k_2^{-1}, k_3^{-1}, 0, 0, 0)$.

Функции V_3 и Q_3 в (4) можно представить в виде

$$V_3 = \sum_{i=1}^3 (a_i \omega_i^2 + a_{i+3} \lambda_i^2); \quad Q_3 = \sum_{i=1}^3 (b_i \omega_i^2 + b_{i+3} \lambda_i^2), \quad (5)$$

где $a_i, b_i, (i = 1, \dots, 6)$ — положительные коэффициенты.

Функционал является полуопределенным, поскольку в отличие от классического метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов Летова — Калмана в него входит неизвестное пока оптимальное управление $\mathbf{u}_{\text{опт}}$.

Функционал включает в себя терминальный член, который представляет собой квадратичную форму от компонент вектора состояния в конечный момент времени t_k и, таким образом, характеризует точность приведения в заданную ориентацию. Второй член функционала (4) — интегральный член, подынтегральная функция которого также является квадратичной формой от компонент вектора состояния. Данный член функционала оценивает качество переходного процесса. Третий член функционала учитывает энергетические затраты на управление.

Вектор оптимального управления $\mathbf{u}_{\text{опт}}$ определяется с помощью выражения

$$\mathbf{u}_{\text{опт}} = -\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T, \quad (6)$$

где V — функция, которая является решением уравнения Ляпунова для неуправляемого ($\mathbf{u} \equiv 0$) объекта:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -Q_3(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

при граничном условии $V_{t=t_k} = V_3(\mathbf{x}(t_k), t_k)$.

Решение уравнения Ляпунова (7), как правило, может быть получено только с помощью численных методов. Часть из них основана на использовании для решения уравнений в частных производных метода характеристик, называемого также методом Коши или первым методом Якоби.

Применение метода характеристик к уравнению Ляпунова дает:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t); \quad (8)$$

$$\dot{V} = -Q_3(\mathbf{x}, t); \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{p} - \left(\frac{\partial Q_3}{\partial \mathbf{x}}\right)^T, \quad (10)$$

где введено обозначение $\mathbf{p} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T$.

Уравнение для оптимального управления в этом случае принимает вид

$$\mathbf{u}_{\text{опт}} = -\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{p}. \quad (11)$$

В отличие от процедуры оптимизации на основе функционала в формулировке Летова — Калмана численное решение уравнений (8)–(10) не приводит к двухточечной краевой задаче. Из уравнения свободного движения (8) определяется состояние объекта в момент времени t_k . Граничное условие для скалярного уравнения (9) получается подстановкой в него $\mathbf{x}(t_k)$ и t_k . Предварительное дифференцирование уравнения свободного движения (8) по компонентам \mathbf{x} и подстановка в него t_k и $\mathbf{x}(t_k)$ дает граничное условие для уравнения (10).

Основанные на численном решении этих уравнений алгоритмы вычисления оптимального управления содержат процедуру численного интегрирования (прогнозирования) свободного (при $\mathbf{u} \equiv 0$) движения объекта. В связи с этим их принято называть алгоритмами с прогнозирующей моделью.

Алгоритм с прогнозирующей моделью и матрицей чувствительности. Это один из наиболее универсальных алгоритмов синтеза оптимального управления, реализующих метод АКОР [8]. Численная реализация алгоритма сводится к выполнению в каждом цикле формирования оптимального управления следующей последовательности операций.

1. Интегрирование на интервале $[t, t_k]$ с шагом Δt_m уравнения свободного движения (прогнозирующей модели)

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x}_m = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \tau) \text{ с начальным условием } \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{x}(t), \quad (12)$$

где τ — модельное время, а индекс «м» указывает на принадлежность соответствующих переменных прогнозирующей модели.

2. Одновременное интегрирование на том же интервале $[t, t_k]$ с тем же шагом Δt_m уравнения для матрицы чувствительности:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{Y}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \tau)}{\partial \mathbf{x}_m} \mathbf{Y}(\tau) \text{ с начальным условием } \mathbf{Y}(t) = \mathbf{E}, \quad (13)$$

где $\mathbf{Y}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_m(t)}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \right)^T$ — матрица чувствительности вектора состояния неуправляемого движения к вариациям компонент вектора начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$; $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \tau)}{\partial \mathbf{x}_m}$ — матрица частных производных вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \tau)$ по вектору состояния \mathbf{x}_m (матрица Якоби), вычисляемая на решениях уравнения прогнозирующей модели; \mathbf{E} — единичная диагональная матрица.

3. Решение уравнений свободного движения и матрицы чувствительности используется для вычисления $\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{Y}^T(t_k) \left(\frac{\partial V_3(t_k)}{\partial \mathbf{x}_m(t_k)} \right)^T + \int_t^{t_k} \mathbf{Y}^T(\tau) \left(\frac{\partial Q_3(\tau)}{\partial \mathbf{x}_m(\tau)} \right)^T d\tau, \quad (14)$$

где $\mathbf{p} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T$.

4. Полученное значение $\mathbf{p}(t)$ служит для вычисления оптимального управления в момент времени t :

$$\mathbf{u}_{\text{опт}}(t) = -\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{p}(t). \quad (15)$$

Результаты моделирования терминальной переориентации КА с использованием алгоритма с прогнозирующей моделью. Для проведения экспериментальных исследований описанного алгоритма оптимизации была разработана и программно реализована на языке C# в среде Microsoft Visual Studio модель процесса управления угловым движением гипотетического КА.

Объект управления — космический летательный аппарат с непрерывной характеристикой исполнительных органов. Моменты инерции КА: $J_1 = 400 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_2 = 600 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_3 = 800 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; оси эллипсоида инерции совпадают с осями связанной системы координат — центробежные моменты инерции равны нулю ($J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$).

Численное интегрирование прогнозирующей модели, уравнения для матрицы чувствительности и уравнения модели движения выполнялись методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

Результаты моделирования терминальной переориентации КА представлены на рис. 1 при следующих граничных условиях по углу крена: $\Upsilon(0) = 5^\circ$; $\Upsilon(t_k) = 0^\circ$; время переориентации $t_k = 5$ с. На графиках относительная ориентация связанного и опорного базисов отображается с помощью углов Эйлера: Υ (крен), ψ (рыскание), ν (тангаж). Заданная угловая ориентация в конечный момент времени: $\Upsilon(t_k) = \psi(t_k) = \nu(t_k) = 0$.

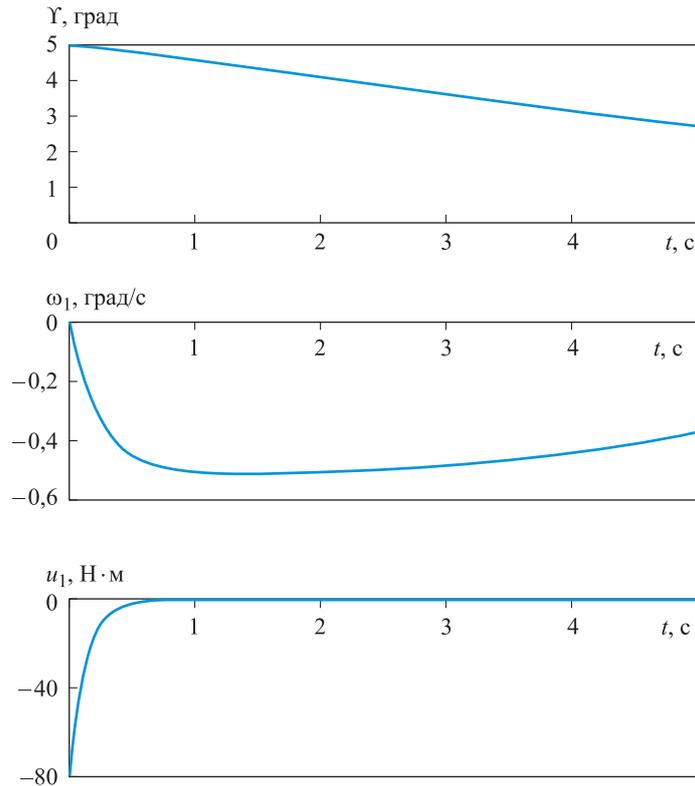


Рис. 1. Процесс переориентации КА в случае синтеза управления с использованием алгоритма с прогнозирующей моделью

Значения коэффициентов функционала качества: $a_i = a_{i+3} = b_i = b_{i+3} = 1$, $k_i = 100$ (здесь и далее размерность коэффициентов не указана), $i = 1, 2, 3$.

Параметры модели:

$\Delta t_m = 50$ мс — шаг интегрирования прогнозирующей модели и матрицы чувствительности;

$\Delta t_{\text{опт}} = 50$ мс — шаг синтеза управления;

$\Delta t = 50$ мс — шаг интегрирования уравнений движения.

Данный пример демонстрирует невысокую точность конечной ориентации: $\Upsilon(t_k) = 1,54^\circ$; остаточные угловые скорости $\omega_1(t_k) = -0,40$ град/с; $\omega_2(t_k) = \omega_3(t_k) = 0$.

Увеличение весовых коэффициентов a_1 , a_4 в терминальном члене функционала до значений $a_1 = 10$, $a_4 = 15$ для повышения точности конечной ориентации (и уменьшение шага синтеза управления до значения $\Delta t_{\text{опт}} = 25$ мс, чтобы обеспечить устойчивость переходного процесса) кардинально не повышает точность конечной ориентации: $\Upsilon(t_k) = 1,44^\circ$; $\omega_1(t_k) = -0,18$ град/с. Кроме того, управление приобретает «ударный» характер: $u_1(0) = -383$ Н·м (рис. 2).

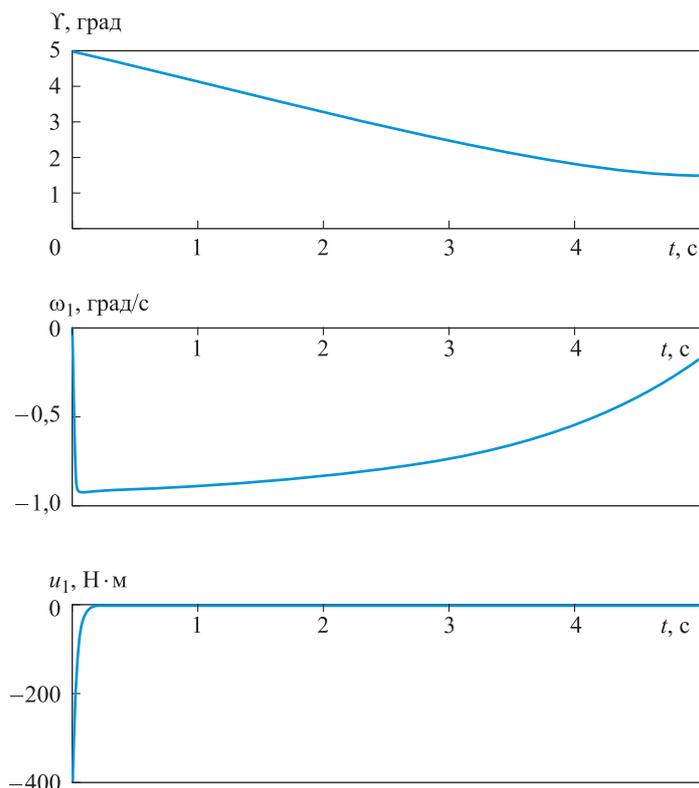


Рис. 2. Процесс переориентации КА при увеличении коэффициентов терминального члена функционала в алгоритме с прогнозирующей моделью

Следует отметить, что оптимизация по критерию обобщенной работы на бесконечном (на практике — достаточно большом) интервале времени, в отличие от метода Летова — Калмана, предполагает априорную устойчивость объекта управления, для чего требуется принимать специальные меры по обеспечению возможности применения метода на основе критерия обобщенной работы для неустойчивых по Ляпунову объектов управления. В работе [9] рассмотрен способ обеспечения устойчивости объекта управления с использованием корректирующей обратной связи по вектору состояния. Закон управления, реализующий данную обратную связь, в общем случае не обеспечивает требуемое качество углового движения. Эту задачу

решает алгоритм оптимального управления на основе метода АКОР по критерию обобщенной работы. В этом случае оптимизации подвергается уже новый объект управления с улучшенными динамическими свойствами. Однако, как показали результаты численных экспериментов [9], с учетом ограничений максимального значения управляющих моментов задача обеспечения заданной точности терминальной переориентации КА применением корректирующей обратной связи не решается.

Рекуррентно-итерационный метод синтеза управления. В работе [10] предложен рекуррентно-итерационный метод решения задачи точной терминальной переориентации космического аппарата на основе применения метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов в формулировке А.А. Красовского. В рассмотрение вместо (3) вводится новый объект управления, движение которого описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) + \Phi \mathbf{u}(t),$$

где $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \Phi \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция времени.

Качество динамического процесса по-прежнему будем оценивать с помощью функционала обобщенной работы (4).

Сущность метода заключается в организации рекуррентно-итерационной процедуры с использованием полученного на текущем шаге оптимального управления в качестве очередной аддитивной составляющей суммарного программного управления на следующем шаге итерационной процедуры.

Применим алгоритм с прогнозирующей моделью и матрицей чувствительности для синтеза оптимального управления переориентацией нового объекта. Организуем рекуррентно-итерационный процесс вычисления оптимального управления $\mathbf{u}_{\text{опт}}$, положив на i -м шаге

$$\mathbf{g}_i(t) = \mathbf{g}_{i-1}(t) + \mathbf{u}_{\text{опт}(i-1)}(t),$$

где $\mathbf{u}_{\text{опт}(i-1)}(t)$ — оптимальное управление, полученное на предыдущей итерации.

Тогда уравнение движения объекта управления и минимизируемый функционал на i -м шаге итерационного процесса можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \Phi \mathbf{g}_i(t) + \Phi \mathbf{u}_i(t).$$

Допустим, что рекуррентно-итерационный процесс синтеза оптимального управления является сходящимся на интервале оптимизации $[t_0, t_k]$:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{g}_i(t) = \hat{\mathbf{g}}(t).$$

Из этого следует, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i(t) \equiv 0$ на интервале $[t_0, t_k]$, что возможно

только при $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{p} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \equiv 0$, где функция V является решением

уравнения Ляпунова для свободного движения объекта управления в методе АКОР формулировки А.А. Красовского (функция Ляпунова в этом случае при $i \rightarrow \infty$ вырождается в гиперплоскость).

Тождественное равенство нулю предельного, при $i \rightarrow \infty$, значения градиента функции Ляпунова означает, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{\text{опт}(i)}(t) \equiv 0$.

Таким образом, функционал при $i \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\hat{I} = V_3(\mathbf{x}(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} Q_3(\mathbf{x}(t)) dt,$$

где $\hat{I} = \lim_{i \rightarrow \infty} I_i$.

Движение объекта при $i \rightarrow \infty$ будет описываться уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{g}}(t),$$

где $\hat{\mathbf{g}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{g}_i$ — предельное значение управления как результат реализации описанной рекуррентно-итерационной процедуры.

На практике при достижении на i -м шаге итерационного процесса заданной точности конечной ориентации управление $\hat{\mathbf{g}}$ может быть принято в качестве решения поставленной задачи синтеза управления терминальной переориентацией космического аппарата.

Алгоритм с прогнозирующей моделью на основе рекуррентно-итерационного метода синтеза управления. На i -й итерации рекуррентно-итерационной процедуры алгоритм синтеза оптимального управления на очередном шаге $\Delta t_{\text{опт}}$ вычисления оптимального управления $\mathbf{u}_{\text{опт}(i)}$ принимает следующий вид:

1) интегрирование на интервале $[t, t_k]$ с шагом Δt_m уравнения прогнозирующей модели

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x}_{mi} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{mi}, \tau) + \boldsymbol{\varphi} \mathbf{g}_i(t) \text{ с начальным условием } \mathbf{x}_{mi}(t) = \mathbf{x}(t), \quad (16)$$

где τ — модельное время; индекс «м» указывает на принадлежность соответствующих переменных прогнозирующей модели;

2) одновременное с (16) интегрирование на том же интервале $[t, t_k]$ с тем же шагом Δt_m уравнения для матрицы чувствительности:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{Y}_i(\tau) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{mi}, \tau)}{\partial \mathbf{x}_{mi}} \mathbf{Y}_i(\tau) \text{ с начальным условием } \mathbf{Y}_i(t) = \mathbf{E}, \quad (17)$$

где $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{mi}, \tau)}{\partial \mathbf{x}_{mi}}$ — матрица частных производных вектор-функции

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{mi}, \tau)$ по вектору состояния \mathbf{x}_{mi} (матрица Якоби), вычисляемая на решениях уравнения (16); \mathbf{E} — единичная диагональная матрица;

3) решение уравнений (16), (17) используется при вычислении $\mathbf{p}(t)_i$:

$$\mathbf{p}(t)_i = \mathbf{Y}_i^T(t_k) \left(\frac{\partial V_3(t_k)}{\partial \mathbf{x}_{mi}(t_k)} \right)^T + \int_t^{t_k} \mathbf{Y}_i^T(\tau) \left(\frac{\partial Q_3(\tau)}{\partial \mathbf{x}_{mi}(\tau)} \right)^T d\tau; \quad (18)$$

4) полученное значение $\mathbf{p}(t)_i$ используется для вычисления оптимального управления в момент времени t :

$$\mathbf{u}_{\text{опт}(i)}(t) = -\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{p}(t)_i.$$

Результаты моделирования терминальной переориентации КА при рекуррентно-итерационном синтезе управления. На рис. 3 представлены результаты моделирования терминальной переориентации КА при $Q_3 = 0$; $\Upsilon(0) = 5^\circ$; $\psi(0) = \nu(0) = 0^\circ$; $\omega_{1,2,3}(0) = 0$ град/с; $t_k = 5$ с. Показаны переходные процессы для случаев применения управления, полученного на 1-й, 10-й и 100-й итерациях функционирования рекуррентно-итерационного алгоритма синтеза управления.

Значения коэффициентов функционала качества: $a_i = 1$; $a_{i+3} = 5$; $b_i = b_{i+3} = 0$; $k_1 = k_i = 10$, $i = 1, 2, 3$. В данном и во всех следующих численных экспериментах $t_{\text{опт}} = \Delta t_m = \Delta t = 50$ мс.

Точность конечной ориентации по углу крена на первой итерации синтеза управления: $\Upsilon(t_k) = 1,20^\circ$; остаточные угловые скорости, град/с: $\omega_1(t_k) = -0,95$; $\omega_2(t_k) = \omega_3(t_k) = 0,0$.

Точность конечной ориентации на 100-й итерации: $\Upsilon(t_k) = 0,01^\circ$, остаточные угловые скорости, град/с: $\omega_1(t_k) = -0,05$; $\omega_2(t_k) = \omega_3(t_k) = 0,0$.

Процесс сходящийся: максимальное значение синтезированного на 10-й итерации управления на два порядка, а на 100-й итерации — на три порядка меньше максимального значения управляющего момента, вычисленного в результате функционирования рекуррентно-итерационного алгоритма. Повышение точности конечной ориентации достигается увеличением количества итераций алгоритма синтеза управления.

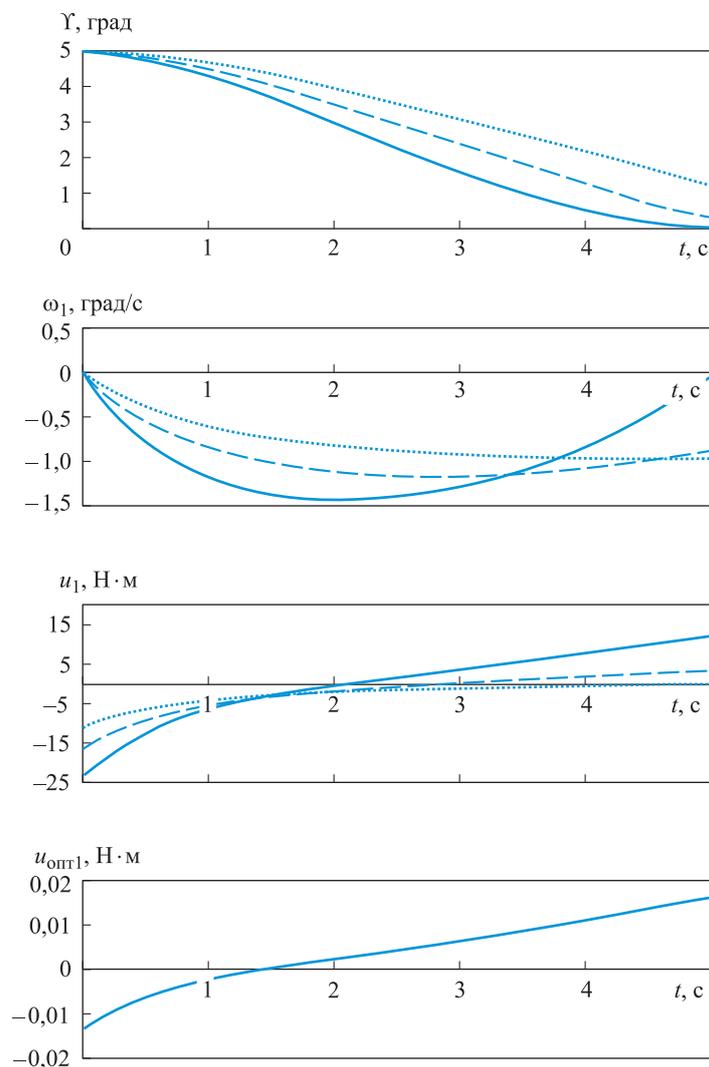


Рис. 3. Процесс переориентации КА при $Q_3 = 0$ и количестве итераций: 1 (.....), 10 (---), 100 (—)

Результаты моделирования терминальной переориентации по крену представлена на рис. 4 с теми же начальными условиями ($Y(0) = 5^\circ$; $\psi(0) = \nu(0) = 0^\circ$, $\omega_{1,2,3}(0) = 0$ град/с), но при $Q_3 \neq 0$. Время переориентации $t_k = 5$ с. Показаны переходные процессы для случаев применения управления, полученного на 1-й, 100-й и 1000-й итерациях функционирования рекуррентно-итерационного алгоритма синтеза управления.

Значения коэффициентов функционала качества: $a_i = 1$; $a_{i+3} = 5$; $b_i = 0,1$ (квадратичная форма от угловых скоростей в интегральном члене функционала не равна нулю); $b_{i+3} = 0$, $k_1 = k_i = 10$, $i = 1, 2, 3$.

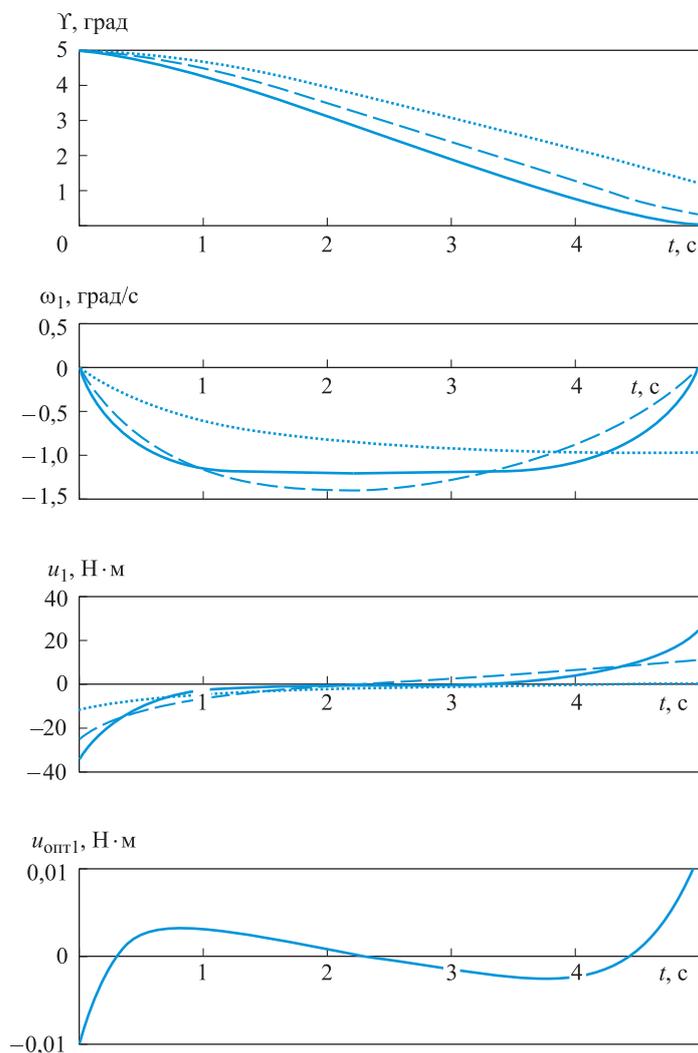


Рис. 4. Процесс переориентации КА при $Q_3 \neq 0$ и количестве итераций:
1 (.....), 100 (---), 1000 (—)

Точность конечной ориентации по углу крена на первой итерации синтеза управления: $\Upsilon(t_k) = 1,24^\circ$; остаточные угловые скорости, град/с: $\omega_1(t_k) = -0,94$; $\omega_2(t_k) = \omega_3(t_k) = 0,00$.

Точность конечной ориентации на 1000-й итерации: $\Upsilon(t_k) = 0,09^\circ$; остаточные угловые скорости, град/с: $\omega_1(t_k) = 0,01$; $\omega_2(t_k) = \omega_3(t_k) = 0,0$.

Результаты моделирования терминальной пространственной переориентации КА представлены на рис. 5 при нулевом интегральном члене функционала ($Q_3 = 0$) и следующих граничных условиях: $\Upsilon(0) = 5^\circ$; $\psi(0) = 2^\circ$; $v(0) = -3^\circ$; $\omega_{1,2,3}(0) = 0$.

Значения коэффициентов функционала качества: $a_i = 1$; $a_{i+3} = 5$; $b_i = b_{i+3} = 0$; $k_i = 10$, $i = 1, 2, 3$.

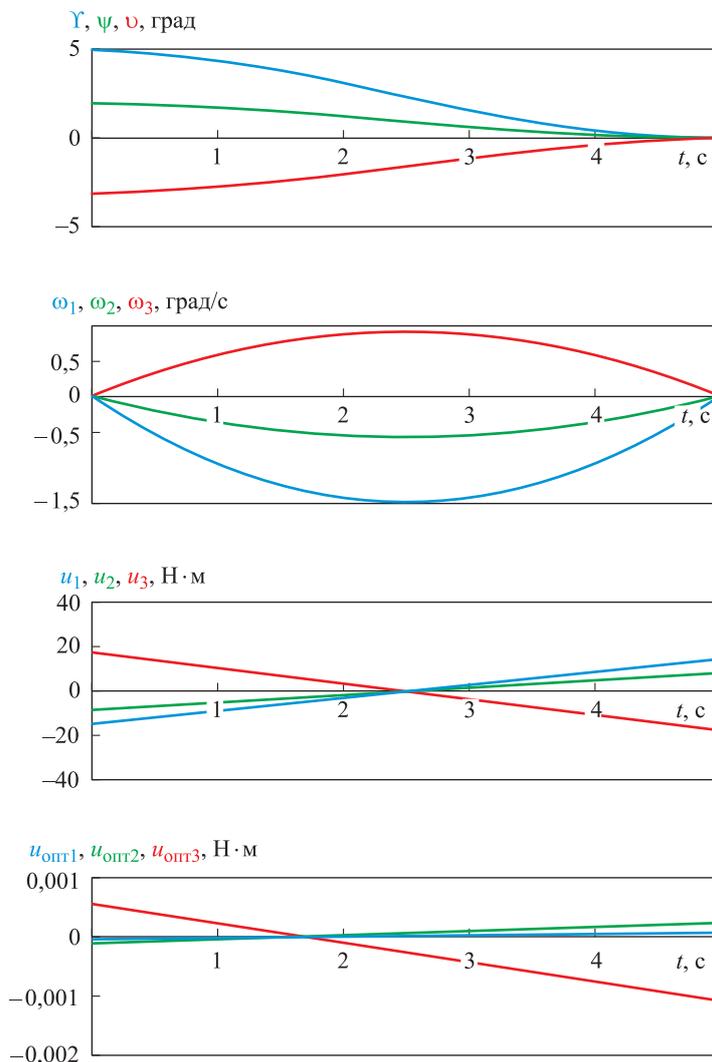


Рис. 5. Процесс пространственной переориентации КА при $Q_3 = 0$ (2000-я итерация)

Точность конечной ориентации при $t = 5$ с на 2000-й итерации: $\Upsilon(t_k) = 0^\circ$; $\psi(t_k) = 0^\circ$; $\nu(t_k) = -0,01^\circ$; остаточные угловые скорости, град/с: $\omega_1(t_k) = -0,00$; $\omega_2(t_k) = -0,01$; $\omega_3(t_k) = 0,03$.

Результаты моделирования терминальной пространственной переориентации КА показаны на рис. 6 при ненулевом интегральном члене функционала ($Q_3 \neq 0$) и тех же граничных условиях, что и в предыдущем численном эксперименте: $\Upsilon(0) = 4^\circ$; $\psi(0) = 9^\circ$; $\nu(0) = -3^\circ$; $\omega_{1,2,3}(0) = 0$.

Значения коэффициентов функционала качества: $a_i = 1$; $a_{i+3} = 5$; $b_i = 0,1$ (квадратичная форма от угловых скоростей в интегральном члене функционала не равна нулю); $b_{i+3} = 0$; $k_i = 10$, $i = 1, 2, 3$.

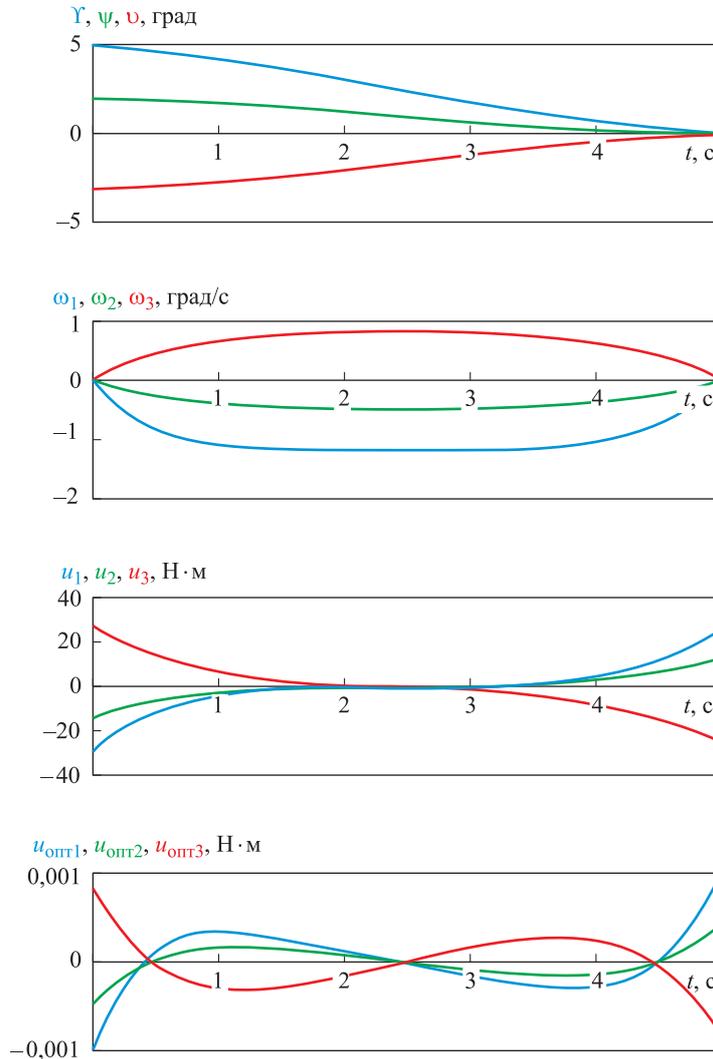


Рис. 6. Процесс пространственной переориентации КА при $Q_3 = 0$ (10 000-я итерация)

Точность конечной ориентации при $t = 5$ с на 10 000-й итерации: $\Upsilon(t_k) = 0,09^\circ$; $\psi(t_k) = 0,03^\circ$; $\nu(t_k) = -0,01^\circ$; остаточные угловые скорости, град/с: $\omega_1(t_k) = -0,04$; $\omega_2(t_k) = 0,02$; $\omega_3(t_k) = 0,003$.

Обсуждение результатов. Проведенные численные эксперименты показали, что требуемое качество переходного процесса космического аппарата определяется предварительной настройкой коэффициентов интегрального члена функционала, а повышение точности конечной ориентации КА достигается увеличением количества итераций алгоритма синтеза управления.

Сравнение результатов численных экспериментов с нулевым и ненулевым интегральными членами функционала показывает, что

скорость сходимости второго процесса значительно медленнее, чем первого. Это объясняется тем, что во втором случае в функционале имеется интегральный член с квадратичной формой от угловых скоростей (коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 не равны нулю) и по мере функционирования итерационной процедуры происходит постепенная трансформация формы переходного процесса по угловой скорости.

Первый вариант алгоритма с «терминальным» функционалом имеет очевидное преимущество в скорости сходимости итерационного процесса. В то же время второй вариант алгоритма с «терминально-интегральным» функционалом может применяться в тех случаях, когда предъявляется требование выполнения переориентации с примерно постоянными угловыми скоростями, с приложением управляющего воздействия в начальной фазе движения и торможением в заключительной фазе разворота.

Следует отметить, что в случае применения рекуррентно-итерационного алгоритма в процессе совмещенного (выполняемого в реальном масштабе времени) синтеза оптимального управления высокоточной терминальной переориентацией КА необходимо выполнение достаточно высоких требований к бортовым вычислительным ресурсам. Данную проблему можно решать путем повышения производительности алгоритма синтеза управления (рационального выбора параметров вычислительного процесса, распараллеливания вычислений). Кроме того, в работе [10] показано, что в некоторых задачах возможно применение так называемого двухэтапного синтеза управления терминальной пространственной переориентацией, включающего в себя предварительный расчет программного управления с использованием рекуррентно-итерационной процедуры и совмещенный с процессом переориентации КА синтез управления в реальном масштабе времени. На алгоритм совмещенного синтеза оптимального управления возлагается задача парирования возмущений, возникающих вследствие неточности отработки заданных управляющих моментов, несовпадения расчетных и реальных инерционно-массовых характеристик, ошибок измерения компонент вектора состояния. Такой подход позволяет значительно снизить требования к вычислительным ресурсам системы управления ориентацией космического аппарата.

Рассмотренный в данной работе алгоритм предусматривает применение исполнительных органов системы ориентации с непрерывной характеристикой исполнительных органов, таких как силовые гироскопы — гиродины. Однако в настоящее время наибольшее распространение в качестве исполнительных органов системы управления движением КА получили реактивные двигатели с постоянной тягой. В работе [11] предложена модификация рекуррентно-итерационного

алгоритма переориентации КА для случая применения реактивных двигателей в системе ориентации космического аппарата.

В дальнейшем предполагается распространить область применения предложенного рекуррентно-итерационного метода на управление центром масс космического летательного аппарата, что позволит, например, решать задачу точной посадки на поверхность Луны.

Заключение. В работе представлен рекуррентно-итерационный алгоритм решения задачи терминальной переориентации космического аппарата на основе метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов в формулировке А.А. Красовского (оптимизация по критерию обобщенной работы).

Проведенные численные эксперименты показали, что предложенный подход к решению задачи терминальной переориентации космического аппарата обеспечивает устойчивость процесса углового движения КА и заданную точность конечной ориентации в практически значимом диапазоне граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубов Н.Е., Ли Е.К., Ли М.В., Микрин Е.А., Поклад М.Н., Рябченко В.Н. Алгоритм вычисления программных значений компонент вектора угловой скорости при терминальном пространственном развороте космического аппарата в инерциальной системе координат. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2015, № 6, с. 3–20.
- [2] Зубов Н.Е., Ли М.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Терминальное построение орбитальной ориентации космического аппарата. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2017, № 4, с. 154–173.
- [3] Левский М.В. Квадратично-оптимальное управление в динамической постановке. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2018, № 1, с. 133–149.
- [4] Платонов В.Н., Сумароков А.В. Обеспечение точностных характеристик стабилизации перспективного космического аппарата для дистанционного зондирования Земли. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2018, № 4, с. 177–188.
- [5] Wang Z., Su Y., Zhang L. Fixed-time attitude tracking control for rigid spacecraft. *IET Control Theory and Applications*, 2020, vol. 14, no. 5, pp. 790–799.
- [6] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*. Москва, Наука, 1973, 320 с.
- [7] Красовский А.А., ред. *Справочник по теории автоматического управления*. Москва, Наука, 1987, 712 с.
- [8] Буков В.Н. *Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом*. Москва, Наука, 1987, 232 с.
- [9] Пушкарь О.Д. Применение корректирующей обратной связи в алгоритме оптимального управления угловым движением твердого тела с использованием прогнозирующих моделей. *Космонавтика и ракетостроение*, 2019, № 4 (109), с. 15–35.
- [10] Пушкарь О.Д. Рекуррентно-итерационный метод решения задачи терминальной переориентации космического аппарата с использованием прогнозирующих моделей. *Космонавтика и ракетостроение*, 2019, № 6 (111), с. 34–53.

- [11] Пушкарь О.Д. Рекуррентно-итерационный алгоритм управления терминальной переориентацией космического аппарата с релейной характеристикой исполнительных органов. *Космонавтика и ракетостроение*, 2020, № 4 (115), с. 21–32.

Статья поступила в редакцию 07.05.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пушкарь О.Д. Рекуррентно-итерационный алгоритм синтеза управления терминальной переориентацией космического аппарата на основе метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 9. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-9-2112>

Пушкарь Олег Дмитриевич — канд. техн. наук, заместитель начальника Центра пилотируемых программ АО «ЦНИИмаш». e-mail: PushkarOD@tsniimash.ru

Recurrent-iterative algorithm for control synthesis of spacecraft terminal reorientation based on the method for analytical design of optimal controllers

© O.D. Pushkar

JSC “Central Research Institute for Machine Building”,
Korolyov, Moscow Region, 141070, Russia

The paper considers the application of the method for analytical design of optimal controllers as formulated by of A.A. Krasovsky (optimization according to the criterion of generalized work) for the control synthesis of spacecraft reorientation from an arbitrary angular position to a given attitude during a fixed time period. A predictive algorithm model was selected as a numerical implementation for the analytical design according to the generalized performance criterion. In order to investigate the angular motion optimization methods experimentally, a model of the spacecraft reorientation control process was developed and implemented in C#. Numerical experiments demonstrated that the generic algorithm does not ensure the specified accuracy of the final orientation, and an increase in the weight coefficients in the terminal member in order to reduce the orientation errors leads to a loss of stability of the dynamic process. The paper proposes a modification of the prediction algorithm — a recurrent-iterative algorithm for exact reorientation of a spacecraft in a fixed time period. The approach used in this case involves organizing an iterative procedure for synthesizing the optimal control of the spacecraft reorientation based on a prediction algorithm. The optimal control calculated at each iteration is used at the next step of the iterative procedure as the next additive component of programmable control. Numerical experiments demonstrated that the recursive-iterative method for reorienting a spacecraft ensures the angular motion stability of the spacecraft and the specified accuracy of the final orientation in a wide range of boundary conditions. The scope of the proposed algorithm is limited to control objects with continuum end-effectors. An example of such a control object is a remote sensing satellite with power gyroscopes (gyrodines) in the orientation system.

Keywords: spacecraft reorientation, optimal control, recurrent-iterative method, predictive model

REFERENCES

- [1] Zubov N.E., Li E.K., Li M.V., Mikrin E.A., Poklad M.N., Ryabchenko V.N. *Vestnik MSTU im. N.E. Bauman. Ser. Priborostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*, 2015, no. 6, pp. 3–20.
- [2] Zubov N.E., Li M.V., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, vol. 56, no. 4, pp. 721–737.
- [3] Levskii M.V. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 1, pp. 131–148.
- [4] Platonov V.N., Sumarokov A.V. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 4, pp. 655–665.
- [5] Wang Z., Su Y., Zhang L. *IET Control Theory and Applications*, 2020, vol. 14, no. 5, pp. 790–799.
- [6] Branets V.N., Shmygalevskiy I.P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of quaternions in problems of orientation of solid body]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 320 p.

- [7] Krasovskiy A.A., ed. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Handbook of automatic control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 712 p.
- [8] Bukov V.N. *Adaptivnye prognoziryushchie sistemy upravleniya polyotom* [Adaptive predictive flight control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 232 p.
- [9] Pushkar O.D. *Kosmonavtika i raketostroenie — Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2019, no. 4 (109), pp. 15–35.
- [10] Pushkar O.D. *Kosmonavtika i raketostroenie — Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2019, no. 6 (111), pp. 34–53..
- [11] Pushkar O.D. *Kosmonavtika i raketostroenie — Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2020, no. 4 (115), pp. 21–32.

Pushkar O.D., Cand. Sc. (Eng), Deputy Head of the Manned Programs Center, JSC “Central Research Institute for Machine Building”. e-mail: PushkarOD@tsniimash.ru