

О.С. Нарайкин, Ф.Д. Сорокин, С.А. Козубняк

**РАСЩЕПЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ
КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА
ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ГИРОСКОПА,
ВЫЗВАННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕМ ФОРМЫ**

Методом возмущений исследованы свободные колебания кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, имеющего малые неосесимметричные отклонения формы от идеальной (малая некрутость). Получено аналитическое выражение для расщепления частот.

E-mail: naraikin@kiaec.ru; sorokin_fd@mail.ru; sark@hexa.ru

Ключевые слова: *твердотельный волновой гироскоп, кольцевой резонатор, расщепление частоты.*

Постоянно развивающиеся автоматизация и интеллектуализация технических систем, их усложнение при одновременном повышении требований к надежности и безопасности функционирования обуславливают увеличение насыщенности объектов техники разнообразными датчиками первичной информации. Являясь ключевыми элементами любых информационно-измерительных систем управления, контроля и диагностики, такие датчики должны обладать все более высокими метрологическими характеристиками и одновременно удовлетворять целому комплексу сложных и, зачастую, противоречивых требований (высокая надежность, помехоустойчивость, малая масса и габариты, малое энергопотребление, низкая стоимость и т. д.).

Всему комплексу современных требований отвечают широко применяемые твердотельные волновые гироскопы (ТВГ) [1] — одни из наиболее перспективных первичных измерительных преобразователей механических величин, относящиеся к классу микроэлектромеханических систем (МЭМС) [2].

Принцип действия ТВГ основан на явлении прецессии упругой стоячей волны, возбужденной в осесимметричном упругом теле (резонаторе) при его вращении вокруг оси симметрии, скорость прецессии пропорциональна угловой скорости вращения резонатора [3]. В реальных ТВГ резонатор, как правило, представляет собой либо стержень кольцевой формы, либо тонкостенную упругую оболочку вращения, которые изготавливают из плавленого кварца, сапфира или другого материала, имеющего малый коэффициент потерь при колебаниях [1, 3].

С помощью системы возбуждения — съема (фиксации) обеспечивают возбуждение и поддержание колебаний резонатора по одной

из его собственных форм (стоячей волны), а также определение положения пучностей стоячей волны на резонаторе [1, 3]. При вращении резонатора стоячая волна прецессирует относительно него, в силу чего положение пучностей изменяется во времени. Измеряя скорость прецессии, можно определять проекцию угловой скорости вращения объекта, на котором установлен ТВГ, на ось симметрии резонатора. При этом резонатор с системой возбуждения — съема составляет электромеханическую автоколебательную систему, частота колебаний которой равна одной из собственных частот резонатора (как правило, одной из низших).

Из изложенного ясно, что с точки зрения проектирования и оптимизации ТВГ важнейшее значение имеет расчет собственных частот и форм резонатора с учетом всех реальных особенностей его геометрии и материала.

К числу наиболее важных факторов, влияющих на метрологические характеристики ТВГ, относятся отклонения параметров геометрии резонатора от идеальных (номинальных) и неоднородность материала резонатора. Это обусловлено тем, что ни одна из существующих технологий не обеспечивает возможности изготовления резонаторов с номинальными параметрами. Можно лишь добиваться, чтобы отклонения этих параметров от номинала, а следовательно, и степень влияния указанных отклонений на рабочие характеристики ТВГ находились в приемлемых пределах.

Необходимо иметь в виду, что указанные отклонения, сохраняющие осевую симметрию резонатора, вызывают лишь сдвиг спектра его частот и могут быть компенсированы сравнительно простыми средствами. Неидеальности параметров геометрии и (или) материала резонатора, приводящие к нарушению осевой симметрии, влекут за собой, зачастую, неприемлемое снижение метрологических характеристик, называемое метрологическим отказом. Это связано с тем, что при малых возмущениях осевой симметрии возникает эффект расщепления собственных частот и форм колебаний резонатора. Эффект выражается в том, что вместо одной частоты в спектре неидеального резонатора возникают две близкие частоты и подвергаются возбуждению две близкие собственные формы, что и приводит к метрологическому отказу системы.

В данной работе рассмотрены алгоритм и некоторые результаты расчета расщепления частот кольцевого резонатора ТВГ, вызванного наиболее важным на практике дефектом — малыми отклонениями геометрии оси резонатора от кольцевой.

Учитывая малость несовершенств, а также тот факт, что на практике колебания резонатора ТВГ являются малыми, воспользуемся аппаратом теории возмущений линейных операторов [4].

В общем случае для самосопряженных линейных операторов \mathbf{T} , \mathbf{G} задача на собственные значения имеет вид [4]

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{G}\mathbf{u}, \quad (1)$$

где \mathbf{T} , \mathbf{G} — линейные самосопряженные операторы; \mathbf{u} — собственный вектор; λ — соответствующее собственное значение.

Возмущения $\lambda^{(1)}$ собственного значения λ , вызванного малыми возмущениями операторов \mathbf{T} , \mathbf{G} , определим с помощью выражения [4]

$$\lambda^{(1)} = \frac{\left((\mathbf{T}^{(1)} - \lambda\mathbf{G}^{(1)}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)}{(\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{u})}, \quad (2)$$

в котором верхним индексом отмечены возмущения.

В случае несамосопряженных операторов выражение (2) принимает вид [5]

$$\lambda^{(1)} = \frac{\left((\mathbf{T}^{(1)} - \lambda\mathbf{G}^{(1)}) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)}{(\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{v})}, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — сопряженное решение.

В одномерных задачах механики систему уравнений для определения собственных векторов (форм свободных колебаний) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} - \lambda\mathbf{B}\mathbf{y}. \quad (4)$$

Здесь $\lambda = p^2$ — квадрат собственной круговой частоты системы; \mathbf{y} — собственный вектор системы (вектор амплитуд обобщенных перемещений и обобщенных внутренних сил в произвольном сечении системы); \mathbf{A} , \mathbf{B} — квадратные матрицы.

Для определения сопряженного решения необходимо рассмотреть сопряженную систему. Представляя (4) в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{F}\mathbf{y}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}, \quad (5)$$

получим сопряженную систему [5]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = -\mathbf{F}^T \mathbf{v}, \quad (6)$$

где \mathbf{v} — вектор сопряженного решения.

Системы (5) и (6) можно представить [6] в блочном виде:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{[1]} \\ \mathbf{y}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[11]} & \mathbf{F}_{[12]} \\ \mathbf{F}_{[21]} & \mathbf{F}_{[22]} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{[1]} \\ \mathbf{y}_{[2]} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где скалярное произведение векторов $\mathbf{y}_{[1]}^T \mathbf{y}_{[2]}$ пропорционально работе:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[11]}^T & \mathbf{F}_{[12]}^T \\ \mathbf{F}_{[21]}^T & \mathbf{F}_{[22]}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Блоки матрицы \mathbf{F} обладают следующими свойствами симметрии [6]:

$$\mathbf{F}_{[11]}^T = -\mathbf{F}_{[22]}, \quad \mathbf{F}_{[12]}^T = \mathbf{F}_{[12]}, \quad \mathbf{F}_{[21]}^T = \mathbf{F}_{[21]}.$$

В силу этого систему (8) можно переписать:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ -\mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[22]} & \mathbf{F}_{[12]} \\ \mathbf{F}_{[21]} & \mathbf{F}_{[11]} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ -\mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Сопоставляя (7) и (9), для решения сопряженной системы (9) получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{y}_{[2]} \\ \mathbf{y}_{[1]} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Например, для балки векторы решений исходной и сопряженной систем имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \{v, \vartheta, Q, M\}^T; \\ \mathbf{v} &= \{-Q, -M, v, \vartheta\}^T, \end{aligned} \quad (11)$$

где v — перемещение; ϑ — угол поворота; Q — поперечная сила; M — изгибающий момент в произвольном сечении.

Обозначим через $\Delta \mathbf{A}$ и $\Delta \mathbf{B}$ возмущения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , с последующими формальными подстановками операторов уравнения (4) в (3) получим выражение для $\Delta \lambda$, т. е. для возмущения собственного значения λ :

$$\Delta \lambda = \frac{\int_0^l (\mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda_0 \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{B} \mathbf{y}_0) dx}{\int_0^l \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 dx}, \quad (12)$$

где индексом 0 обозначены невозмущенные величины.

Очевидно, что (12) дает лишь линейную часть приращения λ . Возмущение круговой частоты связано с $\Delta\lambda$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \Delta(p^2) = (p_0 + \Delta p)^2 - p_0^2 \approx 2p_0\Delta p; \\ \Delta p &= \frac{\Delta\lambda}{2p_0},\end{aligned}\tag{13}$$

где p_0 — собственная круговая частота невозмущенной системы.

Если λ_0 не является кратным корнем, то решение (12) даст одно определенное значение. Кратным корням соответствует не один собственный вектор, а семейство собственных векторов. Следовательно, для кратных λ_0 выражение (12) будет давать некоторый диапазон значений: его границы — экстремальные значения λ_{\min} , λ_{\max} являются двумя значениями, на которые расщепляется λ_0 при возмущении коэффициентов системы уравнений (7). То, что из всего интервала нужно выбирать именно экстремальные значения, следует из свойств отношения Рэля [7, 8]. Очевидно, что экстремальные значения лежат на границах полученного из выражения (12) интервала.

Согласно (13), собственные круговые частоты равны:

$$\begin{aligned}p_{\min} &= p_0 + \frac{\Delta\lambda_{\min}}{2p_0}; \\ p_{\max} &= p_0 + \frac{\Delta\lambda_{\max}}{2p_0}.\end{aligned}\tag{14}$$

Тогда искомая величина расщепления круговой частоты

$$p_{\max} - p_{\min} = \frac{\Delta\lambda_{\max} - \Delta\lambda_{\min}}{2p_0}.\tag{15}$$

Для расчета частот и форм свободных колебаний неидеального кольцевого резонатора (рис. 1) воспользуемся известными уравнениями малых колебаний плоского криволинейного стержня в собственной плоскости [9]. В этом случае собственный вектор

$$\mathbf{y}(\varphi) = \|\mathcal{Q}_1(\varphi) \quad \mathcal{Q}_3(\varphi) \quad M_2(\varphi) \quad u_1(\varphi) \quad u_3(\varphi) \quad \vartheta_2(\varphi)\|^T,\tag{16}$$

где φ — угловая координата произвольного сечения резонатора (см. рис. 1); \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_3 , M_2 — проекции главного вектора \mathbf{Q} и главного момента \mathbf{M} внутренних сил в произвольном сечении резонатора на

оси e_1, e_2, e_3 локальной системы координат (рис. 1, 2); u_1, u_3, ϑ_2 — проекции на оси e_1, e_2, e_3 вектора \mathbf{u} перемещения центра тяжести и вектора ϑ поворота относительно центра тяжести произвольного сечения резонатора; e_1 — единичный вектор, направленный по касательной к осевой линии резонатора; e_2, e_3 — единичные векторы, ортогональные e_1 и друг другу, направлены по главным центральным осям сечения резонатора (см. рис. 1, 2).

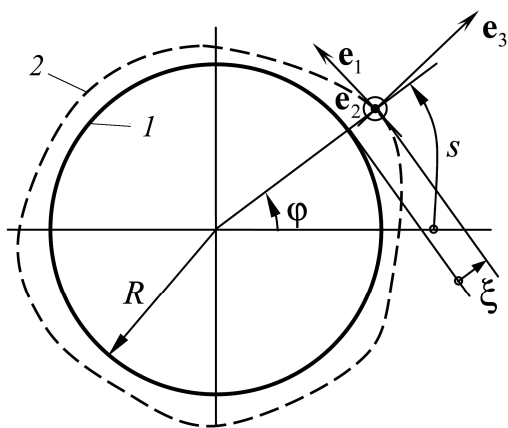


Рис. 1. Форма осевой линии кольцевого резонатора:

1 — идеальная; *2* — возмущенная

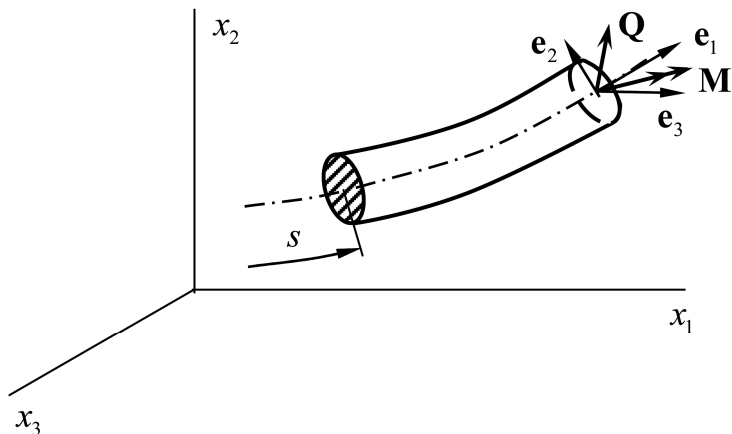


Рис. 2. Орты главных осей поперечного сечения криволинейного стержня и векторы внутренних силовых факторов в сечении

Матрицы **A** и **B** запишем в виде

$$\mathbf{A} = L \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/EY_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (17)$$

$$\mathbf{B} = L\rho F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $L = ds/d\varphi$ — параметр Ламе — масштаб, связывающий дугу s и угловую координату φ (см. рис. 1, 2); α_2 — кривизна осевой линии резонатора; E , ρ — модуль Юнга и плотность материала резонатора; Y_2 — момент инерции поперечного сечения резонатора относительно оси \mathbf{e}_2 ; F — площадь поперечного сечения резонатора.

Для идеального кольцевого резонатора получаем

$$L_0 = R; \quad \alpha_{20} = \frac{1}{R}, \quad (18)$$

где R — радиус осевой линии кольцевого резонатора.

Собственный вектор \mathbf{y}_0 и вектор \mathbf{v}_0 сопряженного решения для идеального кольца [6] имеют вид

$$\mathbf{y}_0(\varphi) = C \begin{pmatrix} \frac{2EY_2}{R^3} \frac{k^2(k^2-1)}{k^2+1} \cos k\varphi \\ -\frac{EY_2}{R^3} k(k^2-1) \sin k\varphi \\ -\frac{EY_2}{R^2} (k^2-1) \cos k\varphi \\ \frac{\sin k\varphi}{k} \\ \cos k\varphi \\ -\frac{k^2-1}{kR} \sin k\varphi \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{v}_0(\varphi) = C \begin{pmatrix} -\frac{\sin k\varphi}{k} \\ -\cos k\varphi \\ \frac{k^2-1}{kR} \sin k\varphi \\ \frac{2EY_2}{R^3} \frac{k^2(k^2-1)}{k^2+1} \cos k\varphi \\ -\frac{EY_2}{R^3} k(k^2-1) \sin k\varphi \\ -\frac{EY_2}{R^2} (k^2-1) \cos k\varphi \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где k — номер гармоники.

Выражение для квадрата k -й собственной частоты идеального кольца можем записать следующим образом [1]:

$$\lambda_{0k} = \frac{EY_2}{\rho FR^4} \frac{k^2(k^2-1)^2}{k^2+1}. \quad (20)$$

Для вычисления $\Delta\lambda$ в соответствии с (12) необходимо найти возмущения $\Delta\mathbf{A}$ и $\Delta\mathbf{B}$ матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} . Согласно (17), для этого достаточно найти возмущения параметра Ламе L и кривизны \varkappa_2 . Как следует из [6], возмущенный параметр Ламе определяется таким соотношением (с точностью до обозначений):

$$L = L_0 \left(1 + \frac{d\eta}{Rd\varphi} + \frac{\xi}{R} \right), \quad (21)$$

где η , ξ — осевое и радиальное отклонения точек осевой линии неидеального резонатора от идеального кольца.

Следует подчеркнуть, что исходная и возмущенная формы не являются деформированными, т. е. под η , ξ понимают не перемещения при переходе от одной геометрии к другой, а компоненты вектора, которые связывают точки, принятые за тождественные. Разумеется, выбор тождественных точек на двух конфигурациях оси кольца неоднозначен. Вопрос о влиянии такого выбора на результат еще не исследован (насколько это известно авторам). Проще всего принять, что при возмущении геометрии отклонения происходят строго по радиусу, т. е. $\eta = 0$. В этом случае

$$\Delta L = \xi. \quad (22)$$

Возмущение кривизны при этом определяется [6] выражением

$$\Delta(\mathbf{x}_2) = -\frac{1}{R^2} \left(\xi + \frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} \right). \quad (23)$$

Для рассматриваемого случая (12) принимает вид

$$\Delta\lambda = \frac{\int_0^{2\pi} (\mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda_0 \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{B} \mathbf{y}_0) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 d\varphi}. \quad (24)$$

Проводя вычисления с учетом (18)—(23), получим

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[2 + \frac{4k^2 - 1}{1 + k^2} \cos(2k\varphi) \right] \frac{\xi}{R} d\varphi. \quad (25)$$

Из (25) следует, что только две гармоники разложения $\xi(\varphi)$ возмущают λ . Нулевая (осесимметричная) гармоника изменяет λ (при большом радиусе кольца частота меньше), но не приводит к расщеплению. Расщепление возникает при возмущениях вида

$$\xi(\varphi) = \xi_{2k} \cos(2k(\varphi - \alpha)). \quad (26)$$

Угол α в (26) описывает положение формы колебаний относительно одной из осей симметрии искаженного кольца. Согласно сказанному выше, из всех значений, полученных подстановкой (26) в (25), следует выбрать экстремальные значения. Очевидно, что эти значения получают при $\alpha = j\pi/(2k)$:

$$\frac{\Delta\lambda_{\min}}{\lambda_0} = -\frac{4k^2 - 1}{1 + k^2} \frac{\xi_{2k}}{R},$$

$$\frac{\Delta\lambda_{\max}}{\lambda_0} = +\frac{4k^2 - 1}{1 + k^2} \frac{\xi_{2k}}{R}.$$

Тогда, согласно (13), расщепление круговой частоты по отношению к частоте невозмущенной системы

$$\frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_0} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2\lambda_0} = \frac{4k^2 - 1}{1 + k^2} \frac{\xi_{2k}}{R}.$$

Для наиболее распространенного на практике случая $k = 2$ получаем

$$p_{\max} - p_{\min} = \frac{3\xi_4}{R} p_0.$$

Выводы

1. Методом возмущений исследован наиболее важный для практики дефект кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа — малое отклонение геометрии оси резонатора от идеальной окружности.

2. Получено аналитическое выражение, позволяющее вычислять расщепления собственной частоты резонатора по функции радиальных возмущений геометрии кольца.

3. Показано, что в первом приближении расщепление частоты, соответствующей k -й гармонике собственных колебаний, вызывается $2k$ -й гармоникой радиальных возмущений геометрии кольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев В.И., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. — 168 с.
2. Джексон Р.Г. Новейшие датчики. — М.: Техносфера, 2007. — 384 с.
3. Вгуан Г.Н. On the beats in the vibrations of revolving cylinder or belle // Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci. — 1890. — Vol. 7. — P. 101–111.
4. Като Т. Теория возмущенных линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
5. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
6. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1977. — 488 с.
7. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968. — 504 с.
8. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1973. — 280 с.
9. Светлицкий В.А. Механика стержней: учеб. для втузов: в 2 ч. — М.: Высш. шк., 1987. — Ч. II. Динамика. — 304 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012