

В. Ф. Апельцин

## ОПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ МАЛОГО СМЕЩЕНИЯ НАБЛЮДАЕМОГО ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ ЗАДАЧИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАССЕЯНИЯ

*Приведена схема проекционного метода построения решения плоской краевой задачи рассеяния E-поляризованной электромагнитной волны на металлическом цилиндре, покрытом тонким слоем диэлектрика. В качестве базиса метода использованы цилиндрические функции радиальной координаты комплексного индекса, удовлетворяющие краевому условию Дирихле на поверхности цилиндра. В асимптотическом приближении для высоких частот получено явное решение в виде обобщенных рядов Ватсона. Выделение из полученного решения в освещенной области оптического интеграла, приближенно вычисляемого методом перевала, приводит к необходимости введения эффективного положения точечного источника возбуждения, отличного от его истинного положения. Наличие малого смещения этого положения подтверждается простейшим экспериментом с лазерной указкой.*

**E-mail:** vapeltsin@hotmail.com

**Ключевые слова:** высокочастотная асимптотика, проекционный метод, ряд Ватсона, геометрическая оптика, оптический эффект, экспериментальное подтверждение.

В случае плоской задачи возбуждения полем точечного источника кругового идеально проводящего цилиндра радиусом  $a$ , покрытого тонким слоем однородного диэлектрика с внешней границей  $r = \rho(\varphi)$ , высокочастотное асимптотическое решение, приводящее к обобщенному ряду Ватсона [1], может быть получено в рамках проекционного обобщения метода Зоммерфельда [2]. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta_{r,\varphi} u(r, \varphi) + k^2(r, \varphi) u(r, \varphi) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \text{ для } r > a, \quad (1)$$

где  $k^2(r, \varphi) = \begin{cases} k_0^2 = \varepsilon_0 \omega^2 & \text{при } r > \rho(\varphi); \\ \varepsilon \omega^2 & \text{при } a < r \leq \rho(\varphi); \end{cases}$

$$u(a, \psi) = 0; \quad [u]_{r=\rho(\varphi)} = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{r=\rho(\varphi)} = 0. \quad (2)$$

Равенства (2) — краевые условия для компоненты  $E_z = u$  электрического поля на поверхности цилиндра и внешней границе диэлектрического слоя.

Опуская субиндексы суммирования, проекционное решение задачи (1), (2) можно записать в виде ряда

$$\hat{u}(r, \varphi) = \sum_{\nu} A_{\nu}(\varphi) \psi_{\nu}(r), \quad (3)$$

где  $A_{\nu}(\varphi)$  — непериодические по углу  $\varphi$  функции, экспоненциально убывающие при  $|\varphi| \rightarrow \infty$ .

Проекционные равенства, эквивалентные задаче (1), (2),

$$\int_a^{\infty} L \cdot \hat{u}(r, \varphi) \psi_{\mu}(r) r dr = f_{\mu}(\varphi), \quad (4)$$

где  $L = (\Delta_{r, \varphi} + k^2(r, \varphi))$ ;  $f_{\mu}(\varphi) = \psi_{\mu}(r_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$ ;  $\psi_{\nu}(r) = \psi_{\nu_k}(r) = C_{\nu_k} H_{\nu_k}^{(1)}(k_0 r)$ ,  $C_{\nu_k}$  — нормировочный коэффициент,  $k = 1, \dots, \infty$ .

Комплексные числа  $\nu_k$  являются корнями дисперсионного уравнения

$$H_{\nu_k}^{(1)}(k_0 r) = 0. \quad (5)$$

Асимптотическое приближение для корней уравнения (5) [1]

$$\nu_k \approx k_0 a + \sigma_k e^i \pi / 3; \quad \sigma_k = \left( \frac{k_0 a}{6} \right)^{1/3} q_k,$$

где  $q_k$  — корни функции Эйри.

Можно показать, что система функций  $\{\psi_{\nu_k}(r)\}$  является ортонормированным базисом в пространстве  $L_2[a, \infty]$  функций  $\nu(r, \varphi)$  при каждом фиксированном значении угла  $\varphi$ .

Кроме того, бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) как развернутая форма проекционных равенств (4) в высокочастотном приближении с точностью до поправок, пропорциональных некоторой степени обратной величины большого параметра  $k_0 a$ , заменяется системой с диагональной матрицей, приближенное решение каждого независимого ОДУ которой строится в явном виде с использованием асимптотического приближения Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна.

Периодическое по углу  $\varphi$  решение можно получить суммированием всех ветвей непериодического решения (3) в виде

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(r, \varphi + 2\pi n).$$

С учетом сделанных приближений обобщенный ряд Ватсона как результат этого суммирования имеет вид

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{[ka]^{1/3} e^{i\pi/3} \sqrt{\pi}}{8} \sum_m \tilde{C}_m H_{\nu_m}^{(1)}(k_0 r) H_{\nu_m}^{(1)}(k_0 r_0) \frac{\cos\left(p_m(\varphi, \varphi_0) - \frac{1}{2} S_m\right)}{\sin \frac{S_m}{2}}. \quad (6)$$

Здесь  $p_m(\varphi, \varphi_0) = \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0) \int_{\varphi_0}^{\varphi} g_m^{1/2}(t) dt$ ;  $S_m = \int_{\varphi_0}^{\varphi} g_m^{1/2}(t) dt$ ;  $\tilde{C}_m =$

$= \frac{\pi^{3/2}}{3 \sqrt[3]{6} (A'(q_m))^2}$ , где  $A'(g_m)$  — значения производной функции Эй-

ри  $A(q) = q_m$ ;  $g_m(t) = v_m^2 - (k^2 - k_0^2) [\rho^2(\varphi) - a^2]$ .

При  $k = k_0$  (отсутствие покрытия) последний сомножитель общего члена ряда (6) соответствует обычному ряду Ватсона [1] для кругового цилиндра без покрытия:

$$\frac{\cos \nu_m (|\varphi - \varphi_0| - \pi)}{\sin \pi \nu_m}.$$

Лучевая картина распространения поля в освещенной области определяется уравнениями для стационарных точек оптического интеграла:

$$-\frac{1}{8} \int_C \frac{H_{\nu}^{(2)}(ka) H_{\nu}^{(1)}(kr) H_{\nu}^{(1)}(kr_0)}{H_{\nu}^{(1)}(ka)} \frac{\cos\left(p_{\nu}(\varphi, \varphi_0) - \frac{1}{2} S_{\nu}\right)}{\sin \frac{S_{\nu}}{2}} d\nu,$$

где контур  $C$  имеет вид, изображенный на рис. 1,

$$2 \arccos \frac{p}{a} + k_0 p \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0) \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0) \int_{\varphi_0}^{\varphi} g_{k_0 p}^{-1/2}(t) dt =$$

$$= \arccos \frac{p}{r} + \arccos \frac{p}{r_0}; \quad (7)$$

$$k_0 q \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0) \int_{\varphi_0}^{\varphi} g_{k_0 q}^{-1/2}(t) dt = \arccos \frac{q}{r} + \arccos \frac{q}{r_0}. \quad (8)$$

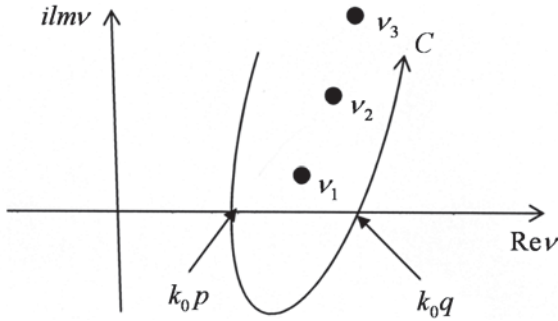


Рис. 1. Расположение стационарных точек оптического интеграла в асимптотическом приближении

Уравнение (7) определяет траекторию луча, пришедшего в точку наблюдения, отразившись от препятствия. Уравнение (8) для стационарной точки  $v_R = k_0 q$  описывает траекторию луча, непосредственно идущего из точки источника в выбранную точку наблюдения. Здесь  $(r_0, \varphi_0)$ ,  $(r, \varphi)$  — полярные координаты точечного источника и точки наблюдения.

Левая часть равенства содержит выражение, связанное с влиянием диэлектрического слоя:

$$g_{k_0 q} = (k_0 q)^2 - g(t).$$

Здесь  $g(t) = \omega^2 (\varepsilon - \varepsilon_0) [\rho^2(t) - a^2]$ , где  $\omega$  — частота;  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость слоя и среды;  $a$  — радиус цилиндра;  $r = \rho(\varphi)$  — полярное уравнение поверхности диэлектрического слоя;  $k_0$  — волновое число внешней среды.

Если слой отсутствует, левая часть равенства (8) очевидно превращается в  $|\varphi - \varphi_0|$ , т. е. уравнение (8) вырождается в известное уравнение для правой стационарной точки оптического интеграла классической задачи рассеяния поля точечного источника на идеально проводящем круговом цилиндре [1]:

$$|\varphi - \varphi_0| = \arccos \frac{q}{r} + \arccos \frac{q}{r_0}, \quad (9)$$

где  $q = v_R / k_0$ . Уравнение (9) допускает простую геометрическую интерпретацию:  $q$  является прицельным параметром луча, идущего из точки источника в точку наблюдения (перпендикуляром, опущенным из центра цилиндра на этот луч, рис. 2).

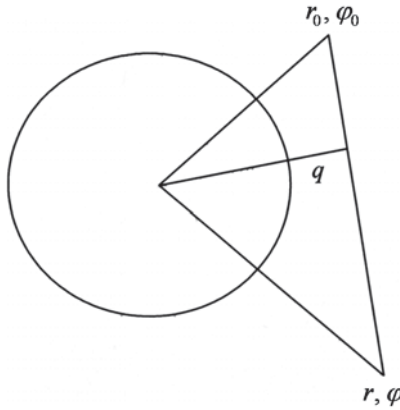


Рис. 2. Прицельный параметр прямого луча в случае цилиндра без покрытия

**Эффективный радиус.** Непосредственная геометрическая интерпретация стационарной точки  $\mu_R$  как решения уравнения (8) в терминах траекторий лучей возможна, лишь если ввести так называемый эффективный радиус точечного источника  $r'_0(q, \varphi, \varphi_0)$  [2] исходя из равенства

$$\arccos \frac{q}{r_0} - k_0 q \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0) \int_{\varphi_0}^{\varphi} g_{k_0 q}^{-1/2}(t) dt = \arccos \frac{q}{r'_0(q, \varphi, \varphi_0)} - |\varphi - \varphi_0|, \quad (10)$$

что позволяет привести уравнение (8) к виду (9), заменив в нем интегральный член выражением из соотношения (10). Упростив интегральный член в этом уравнении с точностью до величин порядка  $O((k_0 \delta)^2)$ , где  $\delta$  — толщина слоя (здесь константа оценки зависит от

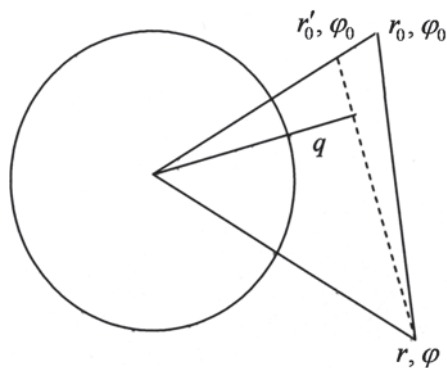
$\frac{1}{k_0^2} \left( \frac{a}{q^2} \right)^2$  и  $q > a$ ), получим

$$r'_0(q, \varphi, \varphi_0) \approx q \left[ \frac{q}{r_0} + \sqrt{1 - \frac{q^2}{r_0^2} \frac{\operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0)}{4 (k_0 q)^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} g(t) dt} \right]^{-1} < r_0.$$

В случае круговых границ как покрытия, так и металлического цилиндра выражение для  $r'_0(q, \varphi, \varphi_0)$  еще более упрощается, вплоть до

$$r'_0(q, \varphi, \varphi_0) = \frac{r_0}{\cos \left\{ |\varphi - \varphi_0| \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{\delta}{a} \right\} + \sqrt{\frac{r_0^2}{q^2} - 1} \sin \left\{ |\varphi - \varphi_0| \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{\delta}{a} \right\}}.$$

Последние соотношения означают, что существует зависящий от углов  $\varphi$ ,  $\varphi_0$  сдвиг (параллакс)  $\Delta r_0 = r_0 - r'_0$  между истинным положением точечного источника ( $r_0$ ,  $\varphi_0$ ) и наблюдаемым ( $r'_0$ ,  $\varphi_0$ ), обусловленный влиянием диэлектрического слоя на рассеянное поле (рис. 3).



**Рис. 3.** Малый сдвиг (параллакс) наблюдаемого положения источника для цилиндра с покрытием

Отметим также, что в случае среды слоя с  $\text{Re } \varepsilon < 0$  (случай холодной плазмы) второе слагаемое в знаменателе этого выражения отрицательно ( $r'_0 > r_0$ ), т. е. параллакс  $\Delta r_0$  имеет противоположный знак.

Таким образом, можно утверждать, что величина и знак параллакса  $\Delta r_0$  могут служить основой для диагностики свойств среды неоднородного слоя, как, например, в технологиях неразрушающего контроля параметров тонких полимерных пленок.

**Эффективный угол.** Другой способ привести уравнение (8) к простейшему виду (9) — введение эффективного угла  $\varphi'_0$  положения точечного источника по формуле

$$k_0 q \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0) \int_{\varphi_0}^{\varphi} g_{k_0 q}^{-1/2}(t) dt = |\varphi - \varphi'_0|. \quad (11)$$

Это также приводит уравнение стационарной точки к виду (9) с  $\varphi'_0$  вместо  $\varphi_0$ :

$$|\varphi - \varphi'_0| = \arccos \frac{q}{r} + \arccos \frac{q}{r_0}.$$

Поступив в отношении подынтегрального выражения в (11) так же, как и выше, получим

$$|\varphi - \varphi_0| + \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi_0) \frac{\omega^2 (\varepsilon - \varepsilon_0) a}{(k_0 q)^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \delta(t) dt = |\varphi - \varphi'_0|. \quad (12)$$

Если рассматривается случай кругового однородного цилиндрического покрытия, то  $\delta(t) = \delta = \text{const}$  и уравнение (12) приводится к простейшему виду:

$$|\varphi - \varphi_0| \left[ 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{\delta a}{q^2} \right] = \Delta \varphi_0, \quad \Delta \varphi_0 = |\varphi - \varphi'_0|.$$

Оба способа сведения уравнения (8) к простейшему виду формально равноправны. Тот факт, что параллакс реально существует, подтверждается несложным экспериментом с использованием лазерной указки. При этом оказывается, что дилемма — эффективный радиус или эффективный угол — решается в пользу сдвига по угловой координате: смещение наблюдаемого положения источника происходит вдоль дуги окружности ( $\Delta r_0 = 0$ ,  $\Delta \varphi_0 \neq 0$ ).

Для проведения эксперимента достаточно иметь обычную лазерную указку и три металлических цилиндра одинакового радиуса с металлической никелированной поверхностью. Один из цилиндров обклеивают пленкой от любого пластикового пакета. Указка располагается параллельно поверхности стола, стоящего вплотную к стене, на высоте, обеспечивающей облучение всех цилиндров, поставленных вертикально на стол, примерно на середине их высоты. Один из двух цилиндров без пленки играет роль выпуклого рассеивающего зеркала, превращающего плоскопараллельный пучок света от указки в рассеянный пучок, имитируя излучение от точечного источника. При этом на стене образуется световая дорожка. Все взаимные расстояния (между указкой и цилиндрами, между цилиндрами и стеной) можно взять порядка 10 см. На пути рассеянного светового пучка ставят цилиндр без пленки. На световой дорожке появляется теневая область с резкими границами, которые следует отметить карандашом. Затем строго на то же место, фиксированное любым удобным способом, ставят обклеенный цилиндр, и также отмечают границы теневой области. Наблюдается их смещение в одном направлении

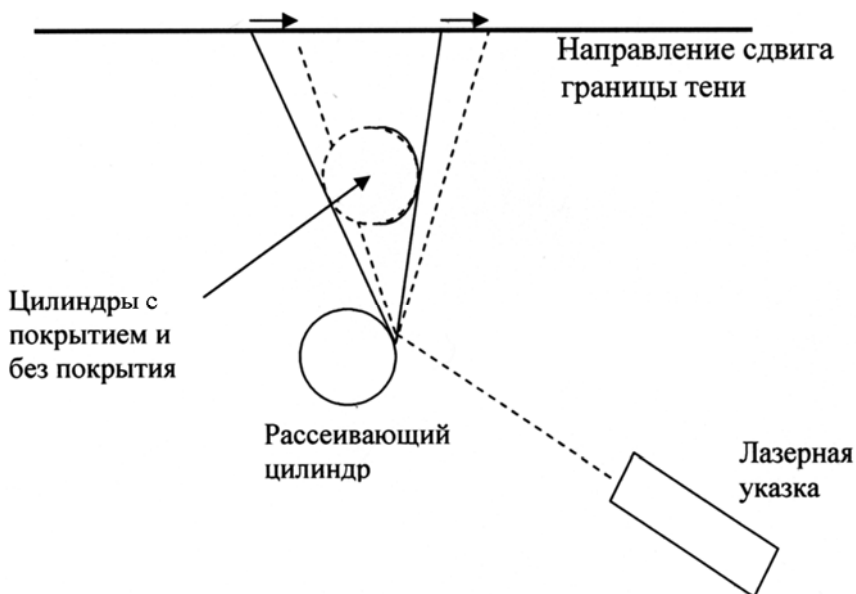


Рис. 4. Схема эксперимента с лазерной указкой

в пределах 1 мм. Это подтверждает вывод о малом смещении эффективного положения источника вдоль дуги окружности, а не по радиальному направлению, что привело бы к сдвигу границ тени в противоположных встречных направлениях (рис. 4).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964.
2. Апельцин В. Ф. Высоочастотный проекционный асимптотический метод исследования задачи возбуждения круглого идеально проводящего цилиндра, покрытого тонким слоем диэлектрика // Радиотехника и электроника. – 1997. – Т. 42, № 3. – С. 1–13.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.