

# Модель эластичного колеса для случая его возмущенного движения по траектории незначительной кривизны

С.Д. Попов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 105005, Россия

*Описан подход к построению модели нестационарного движения эластичного колеса как элемента динамической системы с использованием двустороннего преобразования Лапласа и модели шины типа «нить на упругом основании». Приведены формулы, описывающие амплитудно-частотные характеристики колеса, а также результаты расчетов.*

**E-mail: unesco-tvet-01@yandex.ru**

**Ключевые слова:** эластичное колесо, качение, математическая модель, амплитудно-частотная характеристика.

Методы теории линейных автоматических систем успешно и широко используют при решении как теоретических, так и прикладных задач автомобилестроения. Они полезны при изучении курсовой устойчивости и управляемости колесных машин, а при разработке рулевого управления, особенно при анализе и синтезе дистанционных рулевых систем или рулевого управления многоосных колесных шасси, их применение обязательно.

Это требует описания эластичного колеса как элемента динамической системы и соответствующего подхода к моделированию его нестационарного движения. В частности, нужно знать структуру объекта и его передаточную матрицу; желательно также располагать формулами, описывающими его амплитудно-частотные характеристики и позволяющими выявить главные особенности объекта.

Выполненный в работе [1] анализ простейшей функциональной модели шины “нить на упругом основании” с помощью двустороннего преобразования Лапласа [2] по линейной координате  $x_0$  позволил установить, что при эволюционном движении с незначительной кривизной траектории эластичное колесо можно рассматривать как линейный четырехполюсник:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}(p) \\ \tilde{M}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\text{уст}} \tilde{q}_{\text{н}}(p) & c_6 [\tilde{q}_{\text{н}}(p) - 1] \\ K_{\text{уст}} L_{\text{ст}} [\tilde{q}_L(p) - 1] & c_6 L_{\text{ст}} \tilde{q}_L(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(p) \\ \gamma(p) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{Y}(p)$ ,  $\tilde{M}(p)$  — изображения по Лапласу боковой силы и стабилизирующего момента соответственно;  $p$  — параметр двустороннего преобразования Лапласа по координате  $x_0$  (по траектории эво-

люционного движения центра колеса);  $K_{уст}$  — коэффициент сопротивления боковому уводу при прямолинейном установившемся дви-

жении колеса,  $K_{уст} = c_6 \frac{\sigma \operatorname{th}\left(\frac{L}{2\sigma}\right) + l}{\operatorname{th}^2\left(\frac{L}{2\sigma}\right)}$ ;  $c_6 = 2k(l + \sigma)$  — условная бо-

ковая жесткость шины;  $k$  — жесткость упругого основания нити, моделирующего боковины шины;  $\sigma$  — длина “зоны релаксации” поперечных перемещений экваториальной линии шины относительно обода колеса;  $l$  — половина длины площадки контакта;  $L$  — длина экваториальной линии свободной шины;  $L_{ст}$  — “плечо стабилизации”;

$$\tilde{q}_{ny}(p) = \frac{1}{p} \frac{\left[ \operatorname{th}\left(\frac{L}{2\sigma}\right) \right] (p\sigma + 1)}{2(l + \sigma) \left[ p\sigma + \operatorname{th}\left(\frac{L}{2\sigma}\right) \right]} \left( 1 + \frac{p\sigma - 1}{p\sigma + 1} \exp(-2lp) \right); \quad \tilde{q}_L(p) =$$

$$= q_L \left[ \frac{1 - \exp(-2lp)}{\operatorname{th}(pl)} \right] \left\{ \frac{pl - [1 - p^2\sigma(l + \sigma)] \operatorname{th}(pl)}{p^2(p + b)} \right\}; \quad L_{ст} = \frac{[l^2 + \sigma(l + \sigma)] \operatorname{th}^2\left(\frac{L}{2\sigma}\right)}{3(l + \sigma) \left[ \sigma \operatorname{th}\left(\frac{L}{2\sigma}\right) + l \right]}$$

$$q_L = \frac{3 \left[ \sigma + l \operatorname{cth}\left(\frac{L}{2\sigma}\right) \right]}{2l\sigma [l^2 + (l + \sigma)]}; \quad \alpha — \text{угол поворота обода относительно}$$

направления эволюционного движения;  $y$  — боковое перемещение центра колеса.

Поскольку в основу анализа положено двустороннее преобразование Лапласа [2], следовательно, передаточная матрица в выражении (1) описывает реакцию системы на единичное воздействие  $U(x_0)(1, 1)^T$ .

Реакцию системы на гармоническое воздействие удобно изучать, приняв сначала  $y(x_0) \equiv 0$ , а затем  $\alpha(x_0) \equiv 0$ , т. е. “замораживая входные сигналы”. Предельные теоремы [2] позволяют рассмотреть только мнимую ось  $\langle 0, i\omega_x \rangle$  и построить матрицу амплитудно-частотных характеристик возмущенного движения эластичного колеса по эволюционной траектории с незначительной кривизной:

$$Q(\omega_x) = \begin{pmatrix} Q_{Y\alpha}(\omega_x) & Q_{Yy}(\omega_x) \\ Q_{M\alpha}(\omega_x) & Q_{My}(\omega_x) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$Q_{Y\alpha}(\omega_x) = |K_{\text{уст}} \tilde{q}_{\text{ны}}(i\omega_x)| = K_{\text{уст}} \frac{T}{2(l+\sigma)} \sqrt{\frac{1+\sigma^2\omega_x^2}{\sigma^2\omega_x^2+T}} \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\omega_x};$$

$$Q_{Y\gamma}(\omega_x) = c_6 \tilde{q}_{\text{ны}}(i\omega_x) - 1 = c_6 \sqrt{C^2+D};$$

$$Q_{M\alpha}(\omega_x) = |K_{\text{уст}} L_3 [\tilde{q}_L(i\omega_x) - 1]| = \frac{K_{\text{уст}} L_3 \sqrt{E^2+F^2}}{\sigma^2 + H^2};$$

$$Q_{M\gamma}(\omega_x) = |c_6 L_3 \tilde{q}_L(i\omega_x)| = c_6 q_L L_3 \frac{\omega_x l c - [1 - \omega_x^2 \sigma(l + \sigma)] s}{\omega_x^2 \sqrt{\sigma \omega_x^2 + T^2}};$$

$$T = \text{th}\left(\frac{L}{2\sigma}\right);$$

$$c = \cos(i\omega_x l); \quad s = \sin(i\omega_x l);$$

$$A = 1 + \frac{\sigma^2 \omega_x^2 - 1}{\sigma^2 \omega_x^2 + 1} \cos(2\omega_x l) - \frac{2\sigma \omega_x}{\sigma^2 \omega_x^2 + 1} \sin(2\omega_x l);$$

$$B = \frac{2\sigma \omega_x}{\sigma^2 \omega_x^2 + 1} \cos(2\omega_x l) - \frac{\sigma^2 \omega_x^2 - 1}{\sigma^2 \omega_x^2 + 1} \sin(2\omega_x l);$$

$$C = \frac{B(\sigma^2 \omega_x^2 + T) + A\sigma \omega_x (1-T)T}{2(l+\sigma)(\sigma^2 \omega_x^2 + T^2)\omega_x} - 1;$$

$$D = \frac{A\sigma \omega_x (1-T) - A(\sigma^2 \omega_x^2 + T)T}{2(l+\sigma)(\sigma^2 \omega_x^2 + T^2)\omega_x} - 1;$$

$$E = q_L \sigma s \left\{ \omega_x l - [1 + \sigma(l + \sigma \omega_x)^2] t \right\} + G; \quad t = \text{tg}(i\omega_x l);$$

$$F = q_L \sigma s \left\{ \omega_x l - [1 + \sigma(l + \sigma \omega_x)^2] t \right\} - H; \quad H = -\omega_x^3 \sigma;$$

$$G = -\omega_x^2 T t.$$

Расчеты, выполненные применительно к тороидной диагональной шине 13.00-18, поясняют характер полученных зависимостей и служат примером их практического применения.

В работах [1, 3] было предложено использовать в формуле (1) значения коэффициентов  $K_{\text{уст}}$ ,  $L_3$  и  $c_6$ , рассчитанные по формулам “нелинейной теории бокового увода” [4] или определенные при испытаниях реальной шины в стендовых или дорожных условиях. В данном случае для приближенного определения длины “зоны релаксации”  $\sigma$  использовали экспериментальные значения экстремального коэффициента сопротивления боковому уводу  $K_{y0\sigma}$  и условной боковой жесткости  $c_6$ , а также формулу теории нелинейного увода  $K_{\text{уст}} = q_N K_{y0\sigma}$ , в которой

$$q_N = K_{y03} \operatorname{th}^2 \left( \frac{\pi R_{\text{св}}}{2\sigma} \right) - c_6 \sigma \operatorname{th} \left( \frac{\pi R_{\text{св}}}{2\sigma} \right) - c_6 l = 0,$$

где  $R_{\text{св}}$  — радиус экватора свободной шины.

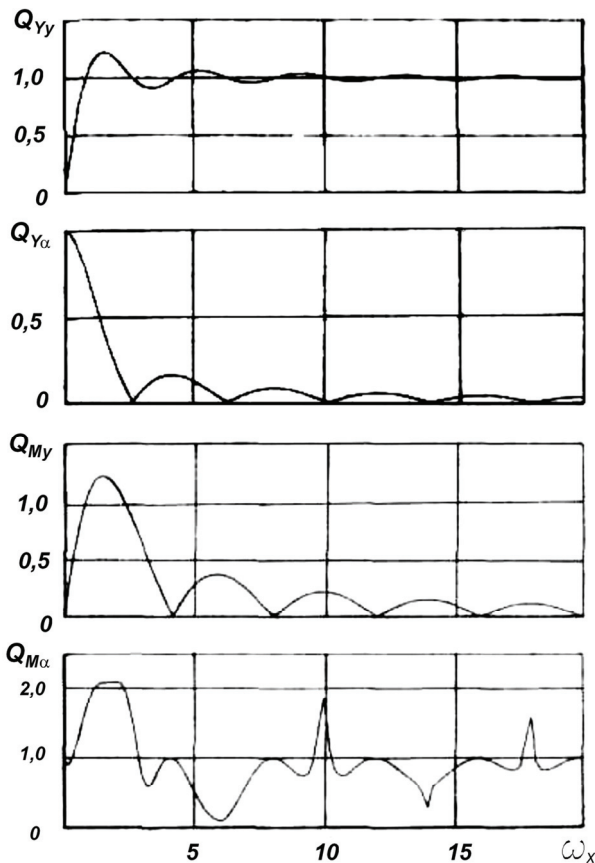
Это уравнение решают относительно  $\sigma$  специальным методом последовательных приближений, позволяющим устранить опасность появления неустойчивого решения из-за ложных экстремумов в окрестности истинного значения корня.

Половину длины площадки контакта вычисляли по формуле

$$l \approx \sqrt{2 \frac{R_{\text{св}} R_z}{c_6} - \frac{R_z^2}{c_p^2}},$$

где  $R_z$  — вертикальная сила, действующая на шину;  $c_p$  — радиальная жесткость свободной шины.

Результаты расчета амплитудно-частотных характеристик колеса приведены на рисунке.



**Амплитудно-частотные характеристики колеса**

Полученные данные можно использовать в теории движения эластичного колеса, а также при исследованиях управляемости и курсовой устойчивости движения колесных транспортных средств в условиях нестационарного бокового увода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов С.Д. Теория бокового увода для случая неустановившегося движения эластичного колеса // Изв. вузов. Машиностроение. 1988. — № 3. — С. 91—95.
2. Поль-ван-дер Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. — М.: Иностран. лит., 1952. — 506 с.
3. Белоусов Б.Н., Попов С.Д. Колесные транспортные средства особо большой грузоподъемности. Конструкция, теория, расчет. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 728 с.
4. Антонов Д.А. Теория устойчивости движения многоосных автомобилей. — М.: Машиностроение, 1978. — 215 с.

Статья поступила в редакцию 05.10.2012