

## УПРУГАЯ И ПЛАСТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ

Рассмотрены группы симметрии структуры анизотропных материалов, группы симметрии упругих и пластических свойств. Показано, что в общем случае группа симметрии упругих свойств выше группы симметрии пластических свойств.

E-mail: sergejtsvetkov@mail.ru

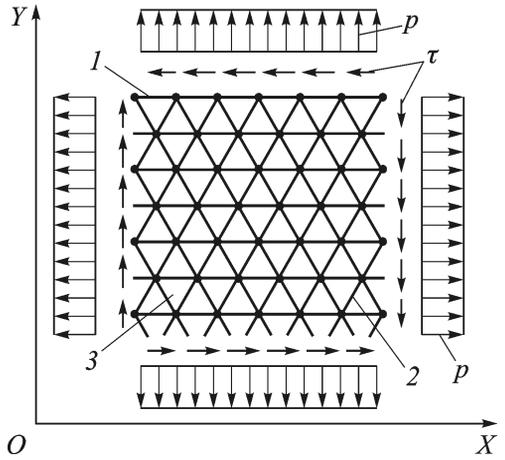
**Ключевые слова:** анизотропия, упругость, пластичность, тензорные функции, группы симметрии.

Современные материалы, применяемые в ракетно-космической технике, часто отличаются высокой степенью анизотропии. Причем анизотропия одних свойств материала может отличаться от вида анизотропии других свойств.

Для иллюстрации этого положения рассмотрим композиционный материал, образованный из одинаковых стержней, шарнирно соединенных в узлах (рисунок). Площадь поперечного сечения стержней  $F$ , их длина  $a$ , модуль упругости материала стержней  $E$ , предел текучести  $\sigma_0$ .

Стержни можно разделить на три семейства (см. рисунок), которые обозначим как: 1 – стержни параллельные оси  $OX$ , 2 – стержни, составляющие угол  $60^\circ$  с осью  $OX$ ; 3 – стержни, составляющие угол  $-60^\circ$  с осью  $OX$ .

Определим упругие характеристики этого материала. При нагружении материала распределенной нагрузкой  $p$  в направлении вдоль оси  $OX$ , силы, возникающие в стержнях семейства 1,  $T_1 = pa \sin 60^\circ$ . Силы, действующие в стержнях семейств 2 и 3,  $T_2 = T_3 = 0$ . Удлинение стержней семейства 1  $\delta_1 = \frac{pa^2\sqrt{3}}{2EF}$ , деформации  $\varepsilon_1 = \frac{pa\sqrt{3}}{2EF}$ . Отсюда модуль упругости рассматриваемого материала при нагружении вдоль оси  $OX$   $E_x = \frac{2EF}{\sqrt{3}ah}$ , где  $h$  – толщина композиционного материала. Деформации материала в поперечном направлении при растяжении



Модель композиционного материала

вдоль оси  $OX$

$$\varepsilon_y = \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a + \delta_1}{2}\right)^2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

Учитывая, что  $\delta_1 \ll a$ , получаем  $\varepsilon_y = \frac{pa\sqrt{3}}{6EF}$ . Коэффициент Пуассона  $\eta_x = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{1}{3}$ .

Рассмотрим нагружение материала погонной нагрузкой  $p$  вдоль направления оси  $OY$ . Силы в стержнях семейства 1  $T_1 = \frac{pa}{2\sqrt{3}}$ , удлинение этих стержней  $\delta_1 = \frac{pa}{2\sqrt{3}EF}$ .

Силы и удлинения в стержнях семейств 2 и 3:  $T_2 = T_3 = \frac{pa}{\sqrt{3}}$ ,  $\delta_2 = \delta_3 = \frac{pa^2}{\sqrt{3}EF}$ . Деформация материала в направлении  $OY$  (в направлении нагрузки)

$$\varepsilon_y = \frac{\sqrt{(a + \delta_2)^2 - \left(\frac{a}{2} - \frac{\delta_1}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}.$$

Учитывая, что удлинения стержней намного меньше их длины, получаем деформации в направлении оси  $OY$   $\varepsilon_y = \frac{\sqrt{3}pa}{2EF}$ , деформации в поперечном направлении  $\varepsilon_x = \frac{pa}{2\sqrt{3}EF}$ . Отсюда модуль упругости материала в направлении оси  $OY$   $E_y = \frac{2EF}{\sqrt{3}ah}$ . Коэффициент Пуассона  $\eta_x = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{1}{3}$ .

Для определения модуля сдвига материала рассмотрим элемент материала, нагруженный распределенными касательными нагрузками  $\tau$  (см. рисунок). Находим силы в стержнях каждого семейства:  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = -\tau a$  и  $T_3 = \tau a$ . Удлинение стержней  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = \frac{-\tau a^2}{EF}$ ,  $\delta_3 = \frac{\tau a^2}{EF} = -\delta_2 = \delta$ . Считая  $\delta \ll a$ , получаем угол сдвига  $\gamma = \frac{4\delta}{a\sqrt{3}}$ .

Отсюда модуль сдвига композиционного материала  $G = \frac{\sqrt{3}EF}{4ah}$ .

Получаем, что для упругих характеристик композиционного материала

$$E_x = E_y = E_0, \quad \eta_x = \mu_y = \eta_0, \quad G = \frac{E_0}{2(1 + \eta_0)}.$$

Таким образом, материал (см. рисунок) по упругим свойствам является изотропным.

Однако при одноосном растяжении вдоль оси  $OX$  композиционный материал начнет проявлять пластические свойства при нагрузке  $p = \frac{2\sigma_0 F}{a\sqrt{3}}$ , а при растяжении вдоль оси  $OY$  — при  $p = \frac{3\sigma_0 F}{a\sqrt{3}}$ . Предел текучести материала при растяжении вдоль оси  $OY$  в 1,5 раза превышает предел текучести в направлении оси  $OX$ . По пластическим свойствам рассматриваемый композиционный материал не является изотропным.

Рассматриваемый материал является примером часто встречающихся на практике случаев, когда вид упругой анизотропии материала не совпадает с видом его пластической анизотропии. Однако нельзя сказать, что упругая и пластическая анизотропии материалов не связаны между собой. Эта связь рассматривается в настоящей статье.

**Виды анизотропии материалов.** Анизотропия различных свойств материала зависит от симметрии его структуры. Симметрия структуры материала определяется совокупностью ортогональных преобразований симметрии, которые совмещают структуру материала саму с собой. Возможные ортогональные преобразования симметрии исчерпываются поворотами вокруг оси и зеркальными поворотами. Совокупность этих преобразований, допускаемых структурой материала, образует группу. В качестве единичного элемента группы выступает тождественное преобразование. Это группа симметрии структуры  $G_T$ .

Для кристаллических материалов в соответствии с известной теоремой кристаллофизики [1] поворотные оси симметрии с порядками  $n = 5$  и  $n > 6$  не возможны. Отсюда кристаллические материалы могут иметь симметрию структуры 32 типов. Для текстур, т.е. для трансверсально изотропных и изотропных материалов, возможны семь классов симметрии [1]. Некоторое время считалось, что данными 39 классами симметрии исчерпываются все виды анизотропных материалов. После открытия квазикристаллов с поворотной осью симметрии пятого порядка [2] эта точка зрения стала считаться устаревшей [3]. Для композиционных материалов легко предложить схемы армирования структур, которые могут иметь оси симметрии любого порядка. Таким образом, видов анизотропии материалов бесконечное множество.

**Симметрия упругих и пластических свойств.** Свойства симметрии присущи не только геометрическим объектам, но и физическим

явлениям и, следовательно, тензорам и тензорным функциям, описывающим эти явления [4].

Для материала, проявляющего при пропорциональном деформировании пластические свойства, диаграммы деформирования нелинейные и описываются нелинейной тензорной функцией

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{mn}); \quad (1)$$

здесь  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений;  $\varepsilon_{mn}$  — тензор деформаций.

Если для некоторого ортогонального преобразования с матрицей  $M_{ij}$  выполняется соотношение

$$M_{im}M_{jn}\sigma_{mn} = F_{ij}(M_{km}M_{ln}\varepsilon_{mn}), \quad (2)$$

то это ортогональное преобразование является элементом симметрии тензорной функции (1).

Совокупность всех ортогональных преобразований, удовлетворяющих (2), образует группу симметрии тензорной функции (1). Это группа симметрии пластических свойств материала  $G_{\Pi}$ .

Принцип Неймана [1, 5] связывает симметрию физического явления, возникающего в анизотропном веществе, с симметрией структуры. В соответствие с этим принципом элементы симметрии любого физического свойства анизотропного материала должны включать элементы группы симметрии структуры этого материала.

Таким образом, группа симметрии структуры материала  $G_T$  или совпадает с группой симметрии пластических свойств, или является подгруппой  $G_{\Pi}$ :

$$G_{\Pi} \supseteq G_T. \quad (3)$$

Отметим, что преобразование инверсии, т.е. преобразование с матрицей

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

является элементом симметрии функции (1). Это вытекает из того, что как функция, так и аргумент функции являются тензорами четного ранга. В группу  $G_T$  преобразование инверсии может не входить.

Функцию (1) можно представить в виде ряда [6]

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{pq}} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{pq} + \dots, \quad (5)$$

где производные берутся при  $\varepsilon_{ij} = 0$ .

Обозначим

$$\mu_{ijkl} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}; \quad \mu_{ijklmn} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn}}; \quad \mu_{ijklmnpq} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{pq}}, \dots \quad (6)$$

Тогда соотношение (6) принимает вид

$$\sigma_{ij} = \mu_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \mu_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \mu_{ijklmnpq}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}\varepsilon_{pq} + \dots \quad (7)$$

Для тензоров, входящих в (7), справедлива симметрия по индексам:

$$i \leftrightarrow j, \quad k \leftrightarrow l, \quad m \leftrightarrow n, \quad p \leftrightarrow q, \dots \quad (8)$$

Это является следствием того, что тензоры деформаций и напряжений симметричные.

Очевидно, что тензоры  $\mu_{ijkl}$ ,  $\mu_{ijklmn}$ ,  $\mu_{ijklmnpq}$ ... инвариантны (индиферентны по терминологии [7]) относительно преобразований группы  $G_{\Pi}$ , т.е. если ортогональное преобразование с матрицей  $M_{ij}$  является элементом группы  $G_{\Pi}$ , то выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \mu_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} M_{i_3 j_3} M_{i_4 j_4} \mu_{j_1 j_2 j_3 j_4}; \\ \mu_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} &= M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} M_{i_3 j_3} M_{i_4 j_4} M_{i_5 j_5} M_{i_6 j_6} \mu_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6}; \\ \mu_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8} &= \\ &= M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} M_{i_3 j_3} M_{i_4 j_4} M_{i_5 j_5} M_{i_6 j_6} M_{i_7 j_7} M_{i_8 j_8} \mu_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6 j_7 j_8}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме преобразований из группы  $G_{\Pi}$ , тензоры могут быть инвариантны относительно и других преобразований. Таким образом, группы симметрии тензоров могут быть различны, и если обозначить группы симметрии тензоров  $\mu_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  как  $G_1$ ,  $\mu_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}$  как  $G_2$ , группу симметрии тензора  $\mu_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8}$  как  $G_3$ ... , то справедливы соотношения

$$G_{\Pi} \subseteq G_1, \quad G_{\Pi} \subseteq G_2, \quad G_{\Pi} \subseteq G_3, \dots, \quad (10)$$

а также

$$\begin{aligned} G_{\Pi} &\subseteq G_1 \cup G_2 \subseteq G_1, \\ G_{\Pi} &\subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3 \subseteq G_1 \cup G_2, \\ G_{\Pi} &\subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (11)$$

Линейно-упругие свойства материала описываются соотношением (7), если в нем оставлен только один член ряда

$$\sigma_{ij} = \mu_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \quad (12)$$

где  $\mu_{ijmn}$  — тензор упругости.

Для этого тензора существует дополнительная симметрия по паре индексов

$$\mu_{ijkl} = \mu_{klij}, \quad (13)$$

что следует из условия существования упругого потенциала.

Группа симметрии тензора упругости  $\mu_{ijmn}$  есть группа симметрии упругих свойств материала  $G_y = G_1$ .

Из (3) и (10) получаем выражение, которое связывает анизотропию структуры материала, анизотропию упругих свойств и анизотропию пластических свойств:

$$G_T \subseteq G_{\Pi} \subseteq G_y. \quad (14)$$

*Замечание 1.* В общем случае группа симметрии пластических свойств ниже, чем группа симметрии упругих свойств. Отсюда следует ограниченность многочисленных предлагаемых вариантов соотношений анизотропной теории пластичности, где в качестве параметра анизотропии используется тензор упругости материала. Строго говоря, такие теории справедливы только для материалов, у которых группы симметрии упругих и пластических свойств совпадают. Однако число групп симметрии пластических свойств бесконечно, в то время как групп симметрии упругих свойств только одиннадцать [5]. Ограниченность таких теорий анизотропной пластичности отмечалась также в работе [8].

*Замечание 2.* Для описания диаграмм деформирования анизотропных материалов, полученных экспериментально или расчетным методом, в ряде (7) можно оставить конечное число членов  $r$ . Это число выбирается из условия заданной точности описания полученных диаграмм. При выборе  $r$  необходимо учитывать еще один фактор. Группа симметрии тензоров (6) зависит от ранга тензора. По теореме Германа [1, 9, 10] тензор ранга  $n$  может иметь поворотные оси симметрии порядка не более  $n$  или ось симметрии бесконечного порядка. Поэтому для более адекватного описания пластической анизотропии материала в усеченном ряде должны присутствовать тензоры, ранг которых по крайней мере равен порядку поворотной оси симметрии структуры материала. Для материала, рассмотренного ранее, поворотная ось симметрии структуры имеет порядок 6. Поэтому для описания пластической анизотропии этого материала, в (7) достаточно оставить два первые члена.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С и р о т и н Ю. И., Ш а с к о л ь с к а я М. П. Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 680 с.
2. S h e c h t m a n D., B l e c h I., G r a t i a s D., C a h n J. W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry // Physical review letters. – Vol. 53. – No. 20. – (12 november 1984). – P. 1951–1953.

3. Bruhns O., Xiao H., Meyers A. On representations of yield functions for crystals, quasicrystals, and transversely isotropic solids // Eur. J. Mech. A/solids. – 1999. – Vol. 18. – P. 47–67.
4. Шубников А. В. О симметрии векторов и тензоров // Изв. АН СССР. – 1949. – Т. 13. № 3. – С. 347–375.
5. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 190 с.
6. Sobotka Z. Tensorial expansions in non-linear mechanics. – Praga, Academia, 1984. – 136 p.
7. Дмитриенко Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
8. Ковальчук Б. И. К теории пластического деформирования анизотропных материалов // Проблемы прочности. – 1975. – № 9. – С. 8–12.
9. Герман В. Л. Некоторые теоремы об анизотропных средах // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 48. – № 2. – С. 95–98.
10. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. – М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1979.

Статья поступила в редакцию 15.05.2012