

## Тепловая конвекция в замкнутой емкости, заполненной компонентом в трехфазовых состояниях

© Г.Н. Товарных

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложена математическая модель расчета давления в замкнутой вертикальной цилиндрической емкости, частично заполненной криогенным компонентом в трех фазовых состояниях при бездренажном хранении. Рассмотрена сопряженная задача о нахождении температурных и гидродинамических полей в области пара и жидкости с учетом тепловых потоков по стенкам при наличии подвижной границы раздела между жидкостью и шугой и неподвижной границы раздела между паром и жидкостью, на которой происходит испарение жидкой фазы. Принято, что пар подчиняется уравнению состояния идеального газа, область шуги изотермична и имеет температуру плавления твердой фазы, в начальный момент времени пар и жидкость неподвижны и имеют температуру и давление тройной точки. Поле температур и скоростей в области пара и чистой жидкости определено из уравнений Навье — Стокса, записанных в приближении Буссинеска с использованием переменных вихрь — функция тока. Задача решена численно с применением метода сеток по явной схеме расчета.*

**Ключевые слова:** криогенная жидкость, криопродукт, бездренажное хранение, пар, жидкость, шуга, плавление, испарение, вихрь, функция тока.

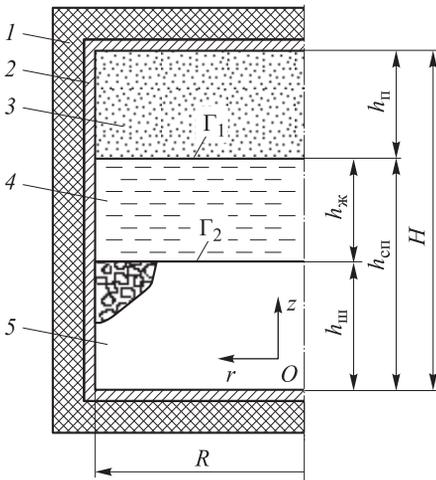
Криогенные жидкости находят широкое применение в различных областях науки и техники. Особый интерес представляет собой криогенная техника, работающая в области водородных и гелиевых температур. При этом очень важными становятся вопросы охлаждения, хранения и транспортировки криопродуктов в неустановившихся режимах при наличии внешних теплопритоков, фазовых переходов и вибрационных нагрузок [1].

Одним из перспективных способов уменьшения потерь криопродуктов является их хранение в предварительно охлажденном [2] или шугообразном состоянии, т. е. в виде смеси твердой и жидкой фаз [3]. Выигрыш в этом случае получается в увеличении запаса холода и плотности криопродукта, а также в уменьшении давления насыщенных паров. Нагрев шугообразного продукта при его постоянном перемешивании вызывает в основном плавление твердой фазы и незначительное повышение давления паров над жидкостью. Управляя притоком теплоты к емкости, можно своевременно перевести шугу в жидкое состояние.

При длительном хранении криогенной жидкости возникает ее температурное расслоение, а при наличии на дне емкости шуги расслоение может стать значительным. Образуется верхний нагретый слой вблизи свободной поверхности, в котором температура и давле-

ние насыщенных паров выше, а плотность ниже, чем в основном объеме компонента. Это расслоение может оказать существенное влияние на процессы испарения и конденсации на границе между жидкостью и паром, а следовательно, и на давление в емкости [4].

Рассмотрим случай бездренажного хранения шуги в вертикальной цилиндрической емкости радиусом  $R$  и высотой  $H$  (рис.1). В исследуемой области имеем следующие характерные зоны:



**Рис. 1.** Общий вид емкости, частично заполненной криопродуктом:

1 — слой теплоизоляции; 2 — металлическая стенка; 3 — область пара; 4 — область чистой жидкости; 5 — область шугообразного продукта; 6 — граница между паром и жидкостью ( $\Gamma_1$ ); 7 — граница между жидкостью и шугой ( $\Gamma_2$ )

температуру плавления твердой фазы, поверхность раздела пар — чистая жидкость неподвижная, а поверхность раздела шуга — чистая жидкость подвижная, плоская и параллельная границе пар — жидкость. Считаем, что температура наружной поверхности теплоизоляции известна, а внутри теплоизоляции по нормали к внешним границам температура распределена по линейному закону. Градиентом температуры в металлической стенке в поперечном направлении пренебрегаем.

Таким образом, сформулирована сопряженная задача о нахождении температурных и гидродинамических полей в области пара и жидкости с учетом теплопереноса по стенкам при наличии подвижной границы раздела между жидкостью и шугой и неподвижной границы — между паром и жидкостью, на которой происходит испарение жидкой фазы.

слоя теплоизоляции 1; металлическая стенка 2; область пара 3; область чистой жидкости 4, образованная в результате плавления твердой фазы в шуге; слой шуги 5.

Теплота из внешней среды поступает через слой теплоизоляции и металлическую стенку в рассматриваемую область, распространяется путем теплопроводности и конвекции в паре и жидкости, вызывает испарение жидкости и плавление твердой фазы в шуге. Вследствие нагрева пара, испарения жидкости, плавления твердой фазы и теплового расширения жидкости происходит рост давления в емкости.

При решении задачи предполагаем, что пар подчиняется уравнению состояния идеального газа, область шуги изотермична и имеет

температуру плавления твердой фазы, поверхность раздела пар — жидкость неподвижная, а поверхность раздела шуга — чистая жидкость подвижная, плоская и параллельная границе пар — жидкость.

Считаем, что температура наружной поверхности теплоизоляции известна, а внутри теплоизоляции по нормали к внешним границам температура распределена по линейному закону. Градиентом температуры в металлической стенке в поперечном направлении пренебрегаем.

Таким образом, сформулирована сопряженная задача о нахождении температурных и гидродинамических полей в области пара и жидкости с учетом теплопереноса по стенкам при наличии подвижной границы раздела между жидкостью и шугой и неподвижной границы — между паром и жидкостью, на которой происходит испарение жидкой фазы.

Численные методы решения задач тепловой конвекции рассмотрены в работах [5–10], а методика расчета положения подвижной границы с учетом плавления твердой фазы — в работах [11, 12]. В работе [13] приведены результаты численного решения задачи о росте давления в одномерной замкнутой области, частично заполненной шугообразным продуктом.

Используя приближение Буссинеска и переменные вихрь — функция тока, запишем систему дифференциальных уравнений энергии и движения в области жидкости и пара в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_ж}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_ж}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}_ж}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_ж}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_ж}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}_ж}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}_ж}{\partial \bar{z}^2}; \\ \frac{\partial \bar{\omega}_ж}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_ж}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\omega}_ж}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_ж}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\omega}_ж}{\partial \bar{z}} &= \frac{\text{Ra}_{ж0} \text{Pr}_{ж0}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_ж}{\partial \bar{r}} + \\ &+ \text{Pr}_{ж0} \left[ 4 \frac{\partial^2 \bar{\omega}_ж}{\partial \bar{r}^2} - 3\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\omega}_ж}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_ж}{\partial \bar{z}^2} \right]; \\ \bar{\omega}_ж &= \frac{1}{\bar{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_ж}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_ж}{\partial \bar{z}^2} \right]; \\ \frac{\partial \bar{T}_н}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_н}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{T}_н}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_н}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_н}{\partial \bar{z}} &= k_1 \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}_н}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}_н}{\partial \bar{z}^2} \right]; \\ \frac{\partial \bar{\omega}_н}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_н}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\omega}_н}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_н}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{\omega}_н}{\partial \bar{z}} &= \\ = k_1 \left\{ k_1 \frac{\text{Ra}_{н0} \text{Pr}_{н0}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}_н}{\partial \bar{r}} + \text{Pr}_{н0} \left[ 4 \frac{\partial^2 \bar{\omega}_н}{\partial \bar{r}^2} - 3\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\omega}_н}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_н}{\partial \bar{z}^2} \right] \right\}; \\ \bar{\omega}_н &= \frac{1}{\bar{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Psi}_н}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_н}{\partial \bar{z}^2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{T} = (T - T_{\text{тр}})/\theta_0$ ;  $T_{\text{тр}}$  — температура тройной точки;  $\theta_0 = T_0 - T_ж$ ;  $T_0$  — начальная температура;  $T_ж$  — температура жидкости; Fo — число Фурье,  $\text{Fo} = (a_{ж0} t)/R^2$ ;  $\bar{r} = r/R$ ;  $\Psi$  — функция тока;  $\bar{\Psi} = \Psi/\text{Ra}_0$ ;  $\bar{z} = z/R$ ;  $\bar{\omega} = \omega R^3/a_0$ ;  $\omega$  — вихрь;  $\text{Ra}_0$  — число Рэлея,  $\text{Ra}_0 = g_0 \beta_0 \theta_0 R^3/(v_0 a_0)$ ; Pr — число Прандтля,  $\text{Pr} = v_0/a_0$ ;  $v$  — вязкость;  $a$  — температуропроводность;  $T_n$  — температура пара;  $k_1 = a_{н0}/a_{ж0}$ .

Уравнение состояния пара имеет вид

$$\bar{p}_n = k_6 \bar{\rho}_n \left( k_7 + \frac{1}{\bar{V}_n} \int_{\bar{V}_n} \bar{T}_n d\bar{V} \right),$$

где  $\bar{p} = p_n/p_{n0}$ ;  $k_6 = R_{\text{пр}} \theta_0 \rho_{n0}/p_{n0}$ ;  $R_{\text{пр}}$  — газовая постоянная;  $\bar{\rho}_n = \rho_n/\rho_{n0}$ ;  $\rho_n$  — плотность пара;  $k_7 = T_{\text{тр}}/\theta_0$ ;  $\bar{V}_n = V_n/(\pi R^3)$ ;  $V_n$  — объем области пара.

Текущую массу пара определим из условия

$$2 \int_0^1 k_2 \left( \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{T}_ж}{\partial \bar{z}} \right)_{\Gamma_1} \bar{r} d\bar{r} = k_3 \bar{h}_n \frac{d\bar{\rho}_n}{d\text{Fo}},$$

где  $k_2 = \lambda_{n0}/\lambda_{ж0}$ ;  $\lambda_0$  — теплопроводность;  $k_3 = L_{\text{исп}} \rho_{n0}/(\theta_0 c_{ж0} \rho_{ж0})$ ;  $L_{\text{исп}}$  — теплота испарения;  $c_0$  — теплоемкость;  $\bar{h}_n = h_n/R$ ;  $h_n$  — высота области пара.

Изменение высоты слоя чистой жидкости в результате плавления шуги найдем из условия Стефана:

$$2 \int_0^1 k_2 \left( \frac{\partial \bar{T}_ж}{\partial \bar{z}} \right)_{\Gamma_2} \bar{r} d\bar{r} + k_5 \bar{T}_{\text{вн}} (1 + 2\bar{h}_{\text{ш}}) = -k_4 \frac{d\bar{h}_{\text{ш}}}{d\text{Fo}},$$

где  $k_5 = \lambda_{\text{из}} R/(\lambda_{ж0} \delta_{\text{из}})$ ;  $\delta_{\text{из}}$  — толщина слоя теплоизоляции;  $k_4 = L_{\text{пл}} \rho_{\text{тв}} \varphi/(\theta_0 c_{ж0} \rho_{ж0})$ ;  $L_{\text{пл}}$  — теплота плавления;  $\rho_{\text{тв}}$  — плотность твердой фазы;  $\varphi$  — объемная концентрация твердой фазы в шуге;  $T_{\text{вн}}$  — температура внешней среды;  $h_{\text{ш}}$  — высота области шуги.

Второе слагаемое в левой части этого уравнения представляет собой поток теплоты, поступающий к шуге через донную и боковую поверхности, которые имеют с ней непосредственный контакт.

На свободной поверхности зависимость температуры испарения жидкости от давления имеет вид

$$\bar{T}_{\text{исп}} = A_1 \bar{p}_n^2 + A_2 \bar{p}_n + A_3,$$

где  $A_i$  — коэффициенты, индивидуальные для каждого криопродукта.

Уравнения для определения температуры стенки имеют вид

$$k_8 \bar{\delta}_{\text{ст}} \frac{\partial \bar{T}_{\text{ст}}}{\partial \text{Fo}} = k_9 \frac{\bar{\delta}_{\text{ст}}}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}_{\text{ст}}}{\partial \bar{r}} \right) + k_5 (\bar{T}_{\text{вн}} - \bar{T}_{\text{ст}}) - k_2 \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{z}};$$

$$k_8 \bar{\delta}_{\text{ст}} \frac{\partial \bar{T}_{\text{ст}}}{\partial \text{Fo}} = k_9 \bar{\delta}_{\text{ст}} \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{ст}}}{\partial \bar{z}^2} + k_5 (\bar{T}_{\text{вн}} - \bar{T}_{\text{ст}}) - k_2 \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{r}};$$

$$k_8 \bar{\delta}_{\text{ст}} \frac{\partial \bar{T}_{\text{ст}}}{\partial \text{Fo}} = k_9 \bar{\delta}_{\text{ст}} \frac{\partial^2 \bar{T}_{\text{ст}}}{\partial \bar{z}^2} + k_5 (\bar{T}_{\text{вн}} - \bar{T}_{\text{ст}}) - \frac{\partial \bar{T}_{\text{ж}}}{\partial \bar{r}},$$

где  $k_8 = c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} / (c_{\text{ж0}} \rho_{\text{ж0}})$ ;  $T_{\text{ст}}$  — температура стенки;  $k_9 = \lambda_{\text{ст}} / \lambda_{\text{ж0}}$ .

В начальный момент времени пар и жидкость считаем неподвижными и имеющими температуру и давление тройной точки. Тепловые граничные условия известны из постановки задачи. Граничные условия для функции тока получаем из граничных условий для скоростей: на твердых поверхностях — из условия «прилипания», на границе пар — жидкость — из равенства нормальных и касательных напряжений, на оси — из условия симметрии. Граничные условия для вихря задаем на вспомогательных поверхностях, отстоящих на один узел сетки от внешних границ, по методике, предложенной в работе [14].

Задачу решаем численно с применением метода сеток по явной схеме расчета. В целях улучшения консервативных свойств разностной схемы, а также для выяснения особенностей пограничного течения жидкой и паровой фаз используем неравномерную сетку с минимальными пространственными шагами вблизи боковой и свободной поверхностей.

Вопросы устойчивости и консервативности применяемой разностной схемы рассмотрены в работе [10]. Уравнения Пуассона для определения вихря решаем итерационным методом переменных направлений. В области жидкости в вертикальном направлении используем растягивающуюся во времени сетку  $32 \times 21$  (одинаковую для областей пара и жидкости).

Расчеты проводим при следующих значениях основных параметров (для шугообразного азота):

$$\bar{h}_{\text{п}} = 0,3; \bar{h}_{\text{ж0}} = 0,3; \bar{h}_{\text{ш0}} = 0,4; \bar{p}_0 = 0,125; \bar{T}_{\text{вн}} = 16,7; \text{Pr}_{\text{п0}} = 0,89;$$

$$\text{Pr}_{\text{ж0}} = 2,28; \text{Ra}_{\text{п0}} = 2,65 \cdot 10^8; \text{Ra}_{\text{ж0}} = 10^8; k_1 = 16,7; k_2 = 0,056;$$

$$k_3 = 0,04; k_4 = 0,5; k_5 = 0,01; k_6 = 0,194; k_7 = 4,45; k_8 = 0,8;$$

$$k_9 = 64; A_1 = -0,36; A_2 = 1,54; A_3 = -0,187.$$

На рис. 2 видно, что зависимость давления от времени близка к линейной.

Наличие шугообразного продукта и значительного вертикального градиента температуры в жидкости и паре приводит к существенному снижению интенсивности конвективного движения (рис. 3 и 4). Влияние конвекции на температурное поле проявляется в узкой зоне, прилегающей к

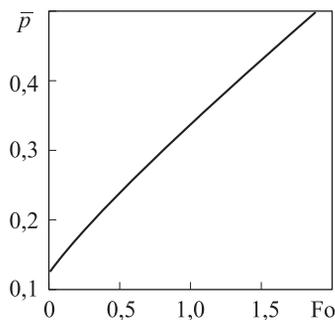
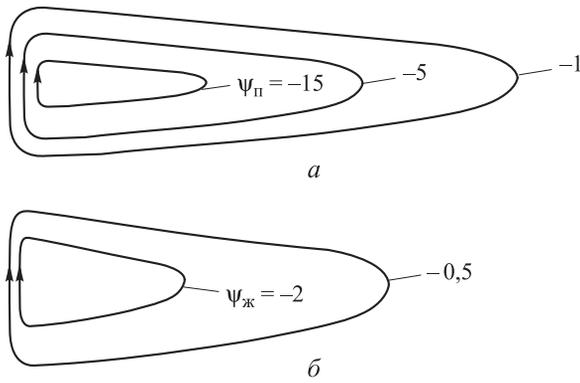
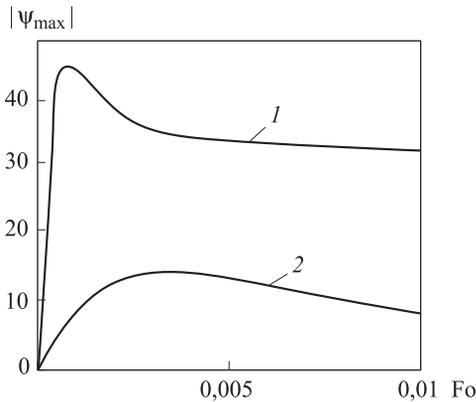


Рис. 2. Изменение давления в емкости во времени



**Рис. 3.** Распределение функции тока в областях, занятых паром (а) и жидкостью (б) в момент времени  $Fo = 0,06$



**Рис. 4.** Изменение максимального значения функции тока во времени в областях, занятых паром (1) и жидкостью (2)

боковой поверхности. Следует отметить, что на боковой поверхности, в области жидкости и вблизи свободной поверхности имеет место перегрев жидкости выше температуры испарения, который составляет около 8 % от температуры  $T_{исп}$ . С течением времени перегрев уменьшается.

Полученные данные позволяют сделать вывод о том, что конвективное движение в процессе хранения шугообразных компонентов развито слабо. Этот вывод справедлив для чисел  $Ra_{п0} \leq 2,65 \cdot 10^8$  и  $Ra_{ж0} \leq 10^8$ , т. е. для малых сосудов в условиях Земли или для больших емкостей в условиях микрогравитации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Филин Н.В., Буланов А.Б. *Жидкостные криогенные системы*. Ленинград, Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1985, 247 с.

- [2] Александров А.А., Денисов О.Е., Золин А.В., Чугунков В.В. Охлаждение ракетного топлива стартовым оборудованием с применением жидкого азота. *Изв. вузов. Машиностроение*, 2013, № 4, с. 24–29.
- [3] Качура В.П., Ганичев А.И. Неустановившиеся процессы в криогенных системах. *Труды МВТУ*. Москва, 1979, № 293, с. 4–6.
- [4] Хабеев Н.С., Шаганов В.Ш., Юмагулова Ю.А. Снижение давления пара в замкнутом объеме вследствие конденсации на границе контакта с холодной жидкостью. *Прикладная математика и механика*, 2013, т. 77, вып. 1, с. 49–55.
- [5] Андерсон Д., Таниехилл Дж., Плетчер Р. *Вычислительная гидродинамика и теплообмен*. Москва, Мир, 1990, 325 с.
- [6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 511 с.
- [7] Полежаев В.И., Бунэ А.В., Веризуб Н.А. *Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье — Стокса*. Москва, Наука, 1987, 248 с.
- [8] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Вычислительная теплопередача*. Москва, Едиториал УРСС, 2003, 782 с.
- [9] Лоханский Я.К. *Основы вычислительной гидромеханики и теплообмена*. Москва, МГИУ, 2008, 80 с.
- [10] Товарных Г.Н. Тепловая конвекция в цилиндрической замкнутой полости при смешанных тепловых граничных условиях. *Труды МВТУ*. Москва 1979, № 293, с. 25–49.
- [11] Домашенко А.М., Качура В.П. Товарных Г.Н. Плавление шугообразного азота в вертикальном цилиндрическом сосуде. *Исследование криогенных установок и технологических процессов в криогенном машиностроении*. Балашиха, НПО Криогенмаш, 1977, с. 42–51.
- [12] Кувыркин Г.Н., Ломохова А.В. Математическое моделирование процесса кристаллизации в установках для выращивания монокристаллов. *Изв. вузов. Машиностроение*, 2007, № 4, с. 37–44.
- [13] Кошкин Г.Д. Рост давления в замкнутой полости, частично заполненной шугообразным продуктом. *Труды МВТУ*. Москва, 1979, № 293, с. 7–24.
- [14] Полежаев В.И., Грязнов В.Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь — функция тока. *Докл. АН СССР*, Москва, 1974, № 2, т. 219, с. 65–71.

Статья поступила в редакцию 06.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Товарных Г.Н. Тепловая конвекция в замкнутой емкости, заполненной компонентом в трехфазовых состояниях. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/861.html>

**Товарных Геннадий Николаевич** окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 22 научных работ в области механики жидкости и газа, теплопереноса. e-mail: [tovarnjx@yandex.ru](mailto:tovarnjx@yandex.ru)