

Оценка геометрически нелинейного поведения коротких поверхностных дефектов анизотропной структуры в композитных панелях при сжатии

© О.В. Митрофанов, М.В. Шкурин, А.А. Дудченко

Московский авиационный институт (НИУ), Москва, 125993, Российская Федерация

Представлена задача определения напряженно-деформированного состояния при закритическом поведении коротких поверхностных дефектов типа расслоений анизотропной структуры в гладких композитных панелях при сжатии. Отмечено, что при нагружении сжимающими усилиями дефекты малой толщины имеют короткую прямоугольную форму, при потере устойчивости и последующем геометрически нелинейном поведении они могут иметь наклонные волны, что связано с анизотропной структурой. Приведенные аналитические решения геометрически нелинейных задач получены методом Бубнова — Галеркина. Для исследования поведения рассматриваемых дефектов использованы два члена тригонометрического ряда прогиба. Показан вариант граничных условий, соответствующий всестороннему шарнирному опиранию. Решение геометрически нелинейной задачи в каждом случае сведено к численному решению системы двух нелинейных уравнений относительно амплитуд прогиба. Для анализа напряженного состояния дефектов приведены аналитические выражения для мембранных и изгибных напряжений, а также равенства для оценки поперечных касательных напряжений, возникающих при геометрически нелинейном состоянии.

Ключевые слова: композитный материал, анизотропная структура, короткие прямоугольные панели, геометрически нелинейное поведение, поверхностные дефекты, сжатие

Введение. При создании современных авиационных конструкций из композитных материалов необходимо проводить исследования влияния различных регламентированных дефектов. В рассматриваемом случае выбраны нагруженные сжимающими усилиями поверхностные дефекты типа расслоений, имеющие короткую прямоугольную форму (при $b < a < 1,5b$), малую толщину δ и анизотропную слоистую структуру. Например, в рассматриваемом случае дефект может иметь структуру $0^\circ/+45^\circ/90^\circ$ и не включать слои с армированием -45° . Исходя из формы дефекта, принят вид прогиба, включающий два члена тригонометрического ряда, который должен учитывать возможный наклон волн при потере устойчивости дефекта.

Далее будут представлены некоторые источники, касающиеся расчетов и проектирования несущих панелей композитных конструкций. Прежде всего следует отметить, что для решения проблемы оценки закритического состояния композитных панелей требуются проведение более широких экспериментальных работ и их публикация, а также формализация нормативных документов [1]. Большой обзор работ,

посвященных расчетам и проектированию несущих композитных панелей с учетом ограничений по устойчивости и прочности при закритическом состоянии, приведен в издании X. Ni, G. Prusty, A. Hellier [2]. Особенно следует выделить монографию B.G. Falzon, M.H. Aliabadi [3], включающую результаты экспериментальных исследований композитных подкрепленных панелей и системный анализ указанных элементов при обеспечении устойчивости и несущей способности. В цикле работ S. Masood, K. Gaddikeri, S. Viswamurthy [4] также представлены экспериментальные и численные исследования несущих композитных панелей с тонкими обшивками при допустимости закритического состояния.

Следует отметить работы Л.М. Гавва и В.В. Фирсанова [5, 6], содержащие аналитический обзор методов расчетов и исследований композитных панелей, а также уточненную теорию для оценки коробления и остаточных технологических напряжений. В монографии А.А. Дудченко и С.А. Лурье [7] приведены решения актуальных задач моделирования процессов роста поврежденности и деградации механических свойств слоистых композитов. В работах А.Л. Медведского с соавторами [8, 9] представлены исследования механики деформирования и разрушения композитных панелей, имеющих дефекты, при динамическом нагружении. Интересна и работа М.В. Клесаревой, А.А. Больших, Е.В. Назарова, Б.Е. Устинова [10] по разработке и апробации методики моделирования композитных подкрепленных панелей с учетом дефектов категории 1 типа BVID (Barely Visible Impact Damage).

В монографии В.И. Голована, В.И. Гришина, А.С. Дзюбы и др. [11] рассмотрены вопросы проектирования, расчетов и статических испытаний металлокомпозитных конструкций. Представляют интерес публикации Ю.И. Дударькова с соавторами [12, 13], посвященные определению напряжений и деформаций поперечного сдвига. В статье В.И. Голована, Ю.И. Дударькова, Е.А. Левченко, М.В. Лимонина [14] описаны исследования несущей способности композитных панелей при наличии эксплуатационных повреждений.

В монографиях [15, 16] представлены некоторые аналитические решения геометрически нелинейных задач композитных панелей и предложена методология проектирования несущих панелей при обеспечении ограничений по прочности при закритическом поведении. В [16] приведены также аналитические решения геометрически нелинейных задач для композитных панелей несимметричной структуры, которые можно использовать для оценки определения напряженно-деформированного состояния (НДС) поверхностных дефектов. В статье [17] рассмотрена аналогичная задача исследования нелинейного поведения для прямоугольного поверхностного расслоения анизотропной структуры при сжатии.

Цель данной работы — получение аналитических решений геометрически нелинейных задач методом Бубнова — Галеркина для оценки напряженно-деформированного состояния короткого прямоугольного фрагмента расслоения анизотропной структуры при одноосном сжатии с учетом уточнения формы прогиба.

Основные геометрически нелинейные соотношения анизотропных прямоугольных панелей. Приведем исходные соотношения для решения геометрически нелинейных задач анизотропных панелей [18, 19].

Условие совместности деформаций имеет следующий вид:

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (1)$$

где L_m — операторы:

$$L_1(\Phi) = \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - g_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} + g_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - g_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^3 \partial x} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4},$$

$$g_{31} = \frac{\eta_{y,xy} + \eta_{xy,y}}{G_{xy}}, \quad g_{22} = \frac{1}{G_{xy}} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} - \frac{\mu_{yx}}{E_x}, \quad g_{13} = \frac{\eta_{x,xy} + \eta_{xy,x}}{G_{xy}},$$

$$L_2(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

нелинейное уравнение равновесия

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \quad (2)$$

где

$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_4(W) = \frac{1}{\delta} \left[D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} \right].$$

Здесь F — функция напряжений; W — прогиб прямоугольной панели; E_x, E_y — модули упругости анизотропной панели в направлении осей x и y ; D_{mn} — изгибные жесткости анизотропной панели [19]; η — коэффициент, используемый при расчете анизотропных панелей; μ_{xy} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение вдоль оси x при растяжении вдоль оси y ; δ — толщина панели; G_{xy} — модуль сдвига в плоскости анизотропного пакета;

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{B}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}, \quad E_y = \frac{B}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}, \quad G_{xy} = \frac{B}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}, \\
 \mu_{xy} &= \frac{B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}, \quad \mu_{yx} = \frac{B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}, \\
 \eta_{x,xy} = \eta_{xy,x} &= \frac{B_{12}B_{23} - B_{22}B_{13}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}, \quad \eta_{y,xy} = \eta_{xy,y} = \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}, \\
 B &= (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)B_{33} + 2B_{12}B_{13}B_{23} - B_{11}B_{23}^2 - B_{22}B_{13}^2; \\
 h &= \sum_{i=1}^n h^{(i)}, \quad \bar{h}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h^{(i)}}{h} \right), \quad B_{mn} = \sum_{i=1}^n A_{mn}^{(i)} \bar{h}^{(i)}, \quad \bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \quad (3) \\
 A_{11}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} \cos^4 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} \sin^4 \varphi_i + 2 \left[\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)} \right] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i, \\
 A_{12}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + \left[\bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} - 4G_{12}^{(i)} \right] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i, \\
 A_{22}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} \sin^4 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} \cos^4 \varphi_i + 2 \left[\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)} \right] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i, \\
 A_{66}^{(i)} &= \left[\bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} \right] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \cos^2 2\varphi_i, \\
 A_{13}^{(i)} &= \sin \varphi_i \cos \varphi_i \left[\bar{E}_1^{(i)} \cos^2 2\varphi_i - \bar{E}_2^{(i)} \sin^2 2\varphi_i - \left(\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)} \right) \cos 2\varphi_i \right], \\
 A_{23}^{(i)} &= \sin \varphi_i \cos \varphi_i \left[\bar{E}_1^{(i)} \sin^2 2\varphi_i - \bar{E}_2^{(i)} \cos^2 2\varphi_i + \left(\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)} \right) \cos 2\varphi_i \right]; \\
 D_{mn} &= I_{mn}^{(2)} - 2eI_{mn}^{(1)} + e^2I_{mn}^{(0)}, \quad I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^N A_{mn}^{(k)} (z_k^{r+1} - z_{k-1}^{r+1}), \\
 m, n &= 1, 2, 3; \quad r = 0, 1, 2,
 \end{aligned}$$

где h — толщина панели, $h = \delta$; φ — угол укладки; $e = \delta/2$ — координата плоскости приведения; z_k — координата k -го слоя, отсчитываемая от плоскости приведения; N — количество слоев.

Далее используем метод Бубнова — Галеркина для получения аналитических решений геометрически нелинейных задач поверочного расчета. Для реализации метода запишем равенство

$$\int_0^a \int_0^b [L_3(F, W) - L_4(W)] W_k dx dy = 0, \quad (4)$$

где W_k — функция прогиба.

В общем случае из определения функции напряжений можно вычислить мембранные напряжения, возникающие при потере устойчивости панели

$$\sigma_x^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{\text{мемб}} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

а изгибные напряжения могут быть определены по формулам из [19]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\text{изгиб}} &= -z \left[B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right], \\ \sigma_y^{\text{изгиб}} &= -z \left[B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right], \\ \tau_{xy}^{\text{изгиб}} &= -z \left[B_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $z = \pm \delta/2$; B_{mn} — жесткости анизотропной структуры.

Определение НДС коротких прямоугольных дефектов анизотропной структуры. Для представленного на рисунке случая анизотропной структуры и геометрических параметров дефекта при $b < a < 1,5b$ и при действии сжимающих потоков q_x будем использовать прогиб W [20], определяемый выражением

$$W = f_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + f_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right), \quad (7)$$

где f_{mn} — амплитуды прогиба.

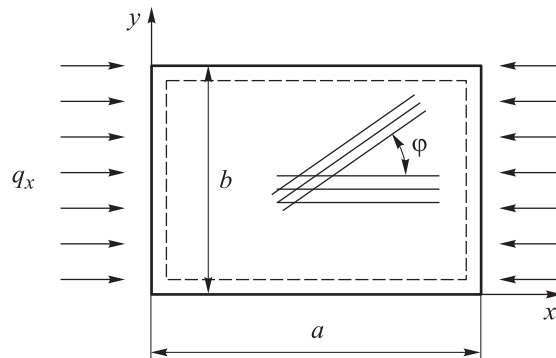


Схема сжатия короткой прямоугольной анизотропной панели:
 a и b — ширина и высота панели

После подстановки выражения для прогиба (7) в геометрически нелинейное уравнение совместности деформаций (1) можно получить функцию напряжений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 F = & A_1 f_1^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_2 f_1^2 \cos \frac{2\pi y}{b} + A_3 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(ay - 3bx)}{ab} + \\
 & + A_4 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(ay + 3bx)}{ab} + A_5 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(bx - 3ay)}{ab} + \\
 & + A_6 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(bx + 3ay)}{ab} + A_7 f_2^2 \cos \frac{4\pi x}{a} + A_8 f_2^2 \cos \frac{4\pi y}{b} - \frac{p_x y^2}{2},
 \end{aligned} \quad (8)$$

где $p_x = \frac{q_x}{\delta}$ — действующая на панель сжимающая нагрузка,

$$A_1 = \frac{E_y a^2}{32 b^2}, \quad A_2 = \frac{E_x b^2}{32 a^2},$$

$$A_3 = \frac{2}{\frac{a^2}{E_x b^2} + 9 \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{81b^2}{E_y a^2} + \frac{27g_{31}b}{a} + \frac{3g_{13}a}{b}},$$

$$A_4 = \frac{2}{\frac{a^2}{E_x b^2} + 9 \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{81b^2}{E_y a^2} - \frac{27g_{31}b}{a} - \frac{3g_{13}a}{b}},$$

$$A_5 = \frac{2}{\frac{81a^2}{E_x b^2} + 9 \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{b^2}{E_y a^2} + \frac{3g_{31}b}{a} + \frac{27g_{13}a}{b}},$$

$$A_6 = \frac{2}{\frac{81a^2}{E_x b^2} + 9 \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y} \right) + \frac{b^2}{E_y a^2} - \frac{3g_{31}b}{a} - \frac{27g_{13}a}{b}},$$

$$A_7 = \frac{E_y a^2}{32 b^2}, \quad A_8 = \frac{E_x b^2}{32 a^2}.$$

Здесь следует заметить, что применяемый в данной задаче прогиб (7) при нагружении анизотропной панели сжимающими усилиями, как правило, используется при рассмотрении аналогичных задач для изотропных или ортотропных панелей [18], нагруженных касательными усилиями. Наличие в уравнении совместности деформаций (1)

анизотропных панелей членов $\partial^4\Phi/\partial x^3\partial y$ и $\partial^4\Phi/\partial x\partial y^3$ приводит к разным функциям напряжении в членах, связанных с произведением амплитуд f_1f_2 , по сравнению с указанными выше нелинейными задачами для изотропного и ортотропного случаев при сдвиге.

Далее приведено выражение для мембранных продольных напряжений потерявшей устойчивость панели при действии сжимающего потока:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\text{мемб}} = & -A_2 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 f_1^2 \cos \frac{2\pi y}{b} - A_3 f_1 f_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi(ay-3bx)}{ab} - \\ & -A_4 f_1 f_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi(ay+3bx)}{ab} - A_5 f_1 f_2 \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi(bx-3ay)}{ab} - \\ & -A_6 f_1 f_2 \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi(bx+3ay)}{ab} - A_8 f_2^2 \left(\frac{4\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{4\pi y}{b} - \frac{q_x}{\delta}, \end{aligned} \quad (9)$$

которое с учетом введения обозначения $\Omega_{xyi}^{\text{мемб}}(x, y)$ можно представить в виде

$$\sigma_x^{\text{мемб}}(x, y) = -f_1^2 \Omega_{xy1}^{\text{мемб}}(x, y) - f_1 f_2 \Omega_{xy2}^{\text{мемб}}(x, y) - f_2^2 \Omega_{xy3}^{\text{мемб}}(x, y) - \frac{q_x}{\delta}. \quad (10)$$

При аналитическом решении геометрически нелинейной задачи методом Бубнова — Галеркина можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{4a^3b^3} \{D_{11}b^4 + 2D_3a^2b^4 + D_{22}a^4\} - \frac{256\pi^2 f_2}{9a^2b^2 f_1} \{D_{16}b^2 + D_{26}a^2\} + \\ + \frac{\pi^2\delta}{90ab} [45\pi^2 f_1^2 (A_1 - A_2) - f_2^2 (7A_3 + 7A_4 - A_5 - A_6)] - \end{aligned} \quad (11)$$

$$- \frac{\pi^2 8 f_1 f_2 \delta}{90ab} [34A_4 - 25A_3 + 7A_5 + 2A_6] = \frac{\pi^2 b q_x}{4a};$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^4}{a^3b^3} \{D_{11}b^4 + 2D_3a^2b^4 + D_{22}a^4\} - \frac{64\pi^2 f_1}{9a^2b^2 f_2} \{D_{16}b^2 + D_{26}a^2\} + \\ + \frac{\pi^2\delta}{315ab} [64\pi^2 f_1 f_2 (62A_3 79 - A_4 + 62A_5 - 142A_6)] - \end{aligned} \quad (12)$$

$$- \frac{\pi^4\delta}{ab} [f_1^2 (A_3 + A_4 + A_5) + 8f_2^2 (A_7 + A_8)] = \frac{\pi^2 b q_x}{a}.$$

Следует заметить, что полученная система допускает только численное решение относительно амплитуд прогиба f_1 и f_2 .

Определение изгибных напряжений. Используя (6), получим выражение только для нормальных продольных изгибных напряжений, возникающих в случае геометрически нелинейного состояния при наличии прогиба, соизмеримого с толщиной:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\text{изгиб}} = & \mp \frac{\delta}{2} \left[B_{11} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(f_1 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) + 4f_2 \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right) + \right. \\ & + B_{12} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(f_1 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) + 4f_2 \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right) + \quad (13) \\ & \left. + 2B_{13} \frac{\pi^2}{ab} \left(f_1 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) + 4f_2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

и увидим, что структура выражений для мембранных (9) и изгибных (13) напряжений различается по входящим тригонометрическим функциям и по степеням амплитуд прогиба.

Особенности определения поперечных касательных напряжений для сжатых анизотропных панелей. Для того чтобы оценить поперечные касательные напряжения при геометрически нелинейном состоянии анизотропных панелей, используют полученные из уравнений равновесия [19] выражения

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -z \left[B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3B_{13} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right], \quad (14) \\ \tau_{yz} = & -z \left[B_{13} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3B_{23} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right]. \end{aligned}$$

Подставив прогиб (7) в (14), получим равенство

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \delta \left[B_{11} \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 \left(f_1 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) + 8f_2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right) + \right. \\ & + 3B_{13} \left(\frac{\pi^3}{a^2 b} \right) \left(f_1 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) + 8f_2 \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right) + \quad (15) \\ & \left. + (B_{12} + 2B_{33}) \left(\frac{\pi^3}{ab^2} \right) \left(f_1 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) + 8f_2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ B_{23} \left(\frac{\pi}{b} \right)^3 \left(f_1 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) + 8 f_2 \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right) \Bigg].$$

Таким образом, соотношения (9), (13) и (15) позволяют определить напряженное состояние анизотропной панели при геометрически нелинейном состоянии с учетом шарнирного опирания при продольном сжатии.

Заключение. Получены аналитические соотношения для оценки напряженно-деформированного состояния коротких прямоугольных поверхностных дефектов анизотропной структуры, нагруженные сжимающими усилиями с учетом геометрически нелинейного поведения. В общем случае аналитическая задача сведена к численному решению двух нелинейных уравнений относительно двух амплитуд прогиба. Получены выражения для определения мембранных и изгибных напряжений, а также для оценки трансверсальных касательных напряжений, возникающих при закритическом поведении. Следует заметить, что приведенные соотношения целесообразно использовать для разработки методики (алгоритма) определения минимальных толщин сжатых коротких прямоугольных анизотропных панелей при ограничениях по прочности, когда допустимо закритическое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Degenhardt R., Castro S., Arbelo M., Zimmerman R., Khakimova R., Kling A. Future structural stability design for composite space and airframe structures. *Thin-Walled Structures*, 2014, vol. 81, pp. 29–38. DOI: 10.1016/j.tws.2014.02.020
- [2] Ni X., Prusty G., Hellier A. Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: A review on optimisation (2000–2015). *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects Part A: International Journal of Maritime Engineering*, 2016, vol. 158, part A3, pp. A-251–A-268. <https://doi.org/10.5750/ijme.v158iA3.994>
- [3] Falzon B.G., Aliabadi M.H. *Buckling and postbuckling structures II: Experimental, analytical and numerical studies*, 2018. <https://doi.org/10.1142/q0127>
- [4] Masood S., Gaddikeri K., Viswamurthy S. Experimental and finite element numerical studies on the post-buckling behavior of composite stiffened panels. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019. <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1701151>
- [5] Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Моделирование коробления и остаточных технологических напряжений при расчете конструктивно-анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов на основе уточненной теории. *Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022): Алушта, 4–13 сентября 2022 года*. Москва, МАИ (НИУ), 2022, с. 70–72.
- [6] Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Аналитический обзор методов расчета и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей ЛА из композиционных материалов.

- Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020), Алушта, 6–13 сентября 2020 года.* Москва, МАИ (НИУ), 2020, с. 274–276.
- [7] Дудченко А.А., Лурье С.А. *Моделирование процессов роста поврежденности и деградации механических свойств слоистых композитов.* Москва, МАИ (НИУ), 2019, 160 с. ISBN 978-5-4316-0630-4
- [8] Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Дедова Д.В. Исследование динамического деформирования и прогрессирующего разрушения композитных элементов конструкций при наличии межслоевых дефектов. *Прочность неоднородных структур — ПРОСТ 2023: Сборник трудов XI Евразийской научно-практической конференции, Москва, 18–20 апреля 2023 года.* Москва, ООО «Студио-Принт», 2023, с. 126.
- [9] Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В. Механика деформирования и разрушения полимерных композитов при наличии множественных расслоений произвольной формы под действием динамических нагрузок. *Труды МАИ*, 2022, № 124. DOI: 10.34759/trd-2022-124-06
- [10] Клесарева М.В., Больших А.А., Назаров Е.В., Устинов Б.Е. Разработка и апробация методики моделирования композитных подкрепленных панелей с учетом дефектов типа BVID. *II Международная конференция «Композитные материалы и конструкции»: Тезисы, Москва, 16 ноября 2021 года.* Москва, Изд-во «Перо», 2021, с. 13–15.
- [11] Голован В.И., Гришин В.И., Дзюба А.С., Замула Г.Н., Лимонин М.В., Дударьков Ю.И. и др. *Проектирование, расчеты и статические испытания металлокомпозитных конструкций.* Москва, ТЕХНОСФЕРА, 2022, 408 с. ISBN 978-5-94836-639-5
- [12] Дударьков Ю.И., Лимонин М.В. Определение напряжений поперечного сдвига в слоистом композите. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2020, т. 86, № 2, с. 44–53. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-2-44-53
- [13] Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., Лимонин М.В. Расчет эквивалентных модулей поперечного сдвига слоистого композиционного пакета. *Ученые записки ЦАГИ*, 2020, т. 51, № 1, с. 80–90.
- [14] Голован В.И., Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В. Несущая способность панелей из композиционных материалов при наличии эксплуатационных повреждений. *Труды МАИ*, 2020, № 110, с. 5. DOI: 10.34759/trd-2020-110-5
- [15] Митрофанов О.В. *Проектирование несущих панелей авиационных конструкций по закритическому состоянию.* Москва, МАИ (НИУ), 2020, 160 с.
- [16] Митрофанов О.В. *Прикладные геометрически нелинейные задачи при проектировании и расчетах композитных авиационных конструкций.* Москва, МАИ (НИУ), 2022, 164 с.
- [17] Митрофанов О.В., Шкурин М.В. Оценка геометрически нелинейного поведения краевых анизотропных дефектов типа расслоений в панелях из композитных материалов при сжатии. *VIII Международная конференция «Проблемы механики современных машин»: Сборник статей конференции, оз. Байкал, 4–9 июля 2022 года.* Улан-Удэ, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2022, с. 498–505. DOI: 10.53980/9785907599055_498
- [18] Вольмир А.С. *Гибкие пластины и оболочки.* Москва, ГИТТЛ, 1956, 419 с.
- [19] Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки.* Москва, Гостехиздат, 1957, 463 с.

Статья поступила в редакцию 22.03.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Митрофанов О.В., Шкурин М.В., Дудченко А.А. Оценка геометрически нелинейного поведения коротких поверхностных дефектов анизотропной структуры в композитных панелях при сжатии. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 4. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2024-4-2353>

Митрофанов Олег Владимирович — д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры 101 «Проектирование и сертификация авиационной техники», Московский авиационный институт (НИУ). e-mail: mitrofanovov@mai.ru

Шкурин Максим Викторович — старший преподаватель кафедры 101 «Проектирование и сертификация авиационной техники», Московский авиационный институт (НИУ). e-mail: m.shkurin@mai.ru

Дудченко Александр Александрович — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», Московский авиационный институт (НИУ).

Assessing geometrically nonlinear behavior of the anisotropic structure short surface defects in composite panels under compression

© O.V. Mitrofanov, M.V. Shkurin, A.A. Dudchenko

Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, 125993, Russian Federation

The paper considers a problem of determining the stress-strain state at supercritical behavior of the short surface defects such as the anisotropic structure delamination in smooth composite panels under compression. It notes that when loaded with the compressive forces, defects of the δ thickness have a short rectangular shape (at $b < a < 1.5b$). With stability loss and subsequent geometrically nonlinear behavior, they could have the oblique waves associated with the anisotropic structure. The presented analytical solutions to geometrically nonlinear problems were obtained by the Bubnov—Galerkin method. To study behavior of the short rectangular defects under consideration, two terms of the trigonometric deflection series were used. The paper analyses a variant of boundary conditions corresponding to the all-round hinged support. In each case, solution to the geometrically nonlinear problem is reduced to numerical solution of a system of two nonlinear equations in regard to the deflection amplitudes. To analyze the defects stressed state, analytical expressions for membrane and bending stresses are provided, as well as equalities to assess the transverse shear stresses arising in the geometrically nonlinear state.

Keywords: composite material, anisotropic structure, short rectangular panels, geometrically nonlinear behavior, surface defects, compression

REFERENCES

- [1] Degenhardt R., Castro S., Arbelo M., Zimmerman R., Khakimova R., Kling A. Future structural stability design for composite space and airframe structures. *Thin-Walled Structures*, 2014, vol. 81, pp. 29–38. <https://10.1016/j.tws.2014.02.020>
- [2] Ni X., Prusty G., Hellier A. Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: A review on optimisation (2000–2015). *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects Part A: International Journal of Maritime Engineering*, 2016, vol. 158, part A3, pp. A-251–A-268. <https://doi.org/10.5750/ijme.v158iA3.994>
- [3] Falzon B.G., Aliabadi M.H. *Buckling and postbuckling structures II: Experimental, analytical and numerical studies*, 2018. <https://doi.org/10.1142/q0127>
- [4] Masood S., Gaddikeri K., Viswamurthy S. Experimental and finite element numerical studies on the post-buckling behavior of composite stiffened panels. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019. <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1701151>
- [5] Gavva L.M., Firsanov V.V. Modelirovanie korobleniya i ostatochnykh tekhnologicheskikh napryazheniy pri raschete konstruktivno-anizotropnykh paneley LA iz kompozitsionnykh materialov [Simulation of postbuckling and residual technological stress when calculating structurally anisotropic aircraft panels from composite materials]. In: *Materialy XIV Mezhdunarodnoy konferentsii po prikladnoy matematike i mekhanike v aerokosmicheskoy otrasli (AMMAI'2022), Alushta, 4–13 sentyabrya 2022 goda* [Proceedings of the XII International Con-

- ference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (AMMAI'2022), Alushta, September 4–13, 2022]. Moscow, MAI (NIU) Publ., 2022, pp. 70–72.
- [6] Gavva L.M., Firsanov V.V. Analiticheskiy obzor metodov rascheta i eksperimentalnykh issledovaniy napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstruktivno-anizotropnykh paneley LA iz kompozitsionnykh materialov [Analytical review of calculation methods and experimental studies of the stress-strain state of structurally anisotropic aircraft panels made of composite materials]. In: *Materialy XIII Mezhdunarodnoy konferentsii po prikladnoy matematike i mekhanike v aerokosmicheskoy otrasli (AMMAI'2020)*, Alushta, 6–13 sentyabrya 2020 goda [Proceedings of the XII International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (AMMAI'2020), Alushta, September 6–13, 2020]. Moscow, MAI (NIU) Publ., 2020, pp. 274–276.
- [7] Dudchenko A.A., Lurye S.A. *Modelirovanie protsessov rosta povrezhdennosti i degradatsii mekhanicheskikh svoystv sloistykh kompozitov* [Modeling the processes of damage growth and degradation of mechanical properties of the layered composites]. Moscow, MAI (NIU) Publ., 2019, 160 p. ISBN 978-5-4316-0630-4
- [8] Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Dedova D.V. Issledovanie dinamicheskogo deformirovaniya i progressiruyushchego razrusheniya kompozitnykh elementov konstruktsey pri nalichii mezhsloevykh defektov [Study of dynamic deformation and progressive destruction of composite structural elements in the presence of interlayer defects]. In: *Prochnost neodnorodnykh struktur – PROST 2023: Sbornik trudov XI Evraziyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Moskva, 18–20 aprelya 2023 goda* [Strength of inhomogeneous structures – PROST 2023: Proceedings of the XI Eurasian Scientific and Practical Conference]. Moscow, Studio-Print Publ., 2023, 126 p.
- [9] Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V. Mekhanika deformirovaniya i razrusheniya polimernykh kompozitov pri nalichii mnozhestvennykh rassloeniy proizvolnoy formy pod deystviem dinamicheskikh nagruzok [Fracture and deformation mechanics of polymer composites in the presence of multiple bundles of arbitrary shape under the action of dynamic loads]. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. <https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-06>
- [10] Klesareva M.V., Bolshikh A.A., Nazarov E.V., Ustinov B.E. Razrabotka i aprobatsiya metodiki modelirovaniya kompozitnykh podkreplennykh paneley s uchetom defektov tipa BVID [Development and validation of modeling technique for composite stiffened panels considering BVID defects]. In: *II Mezhdunarodnaya konferentsiya “Kompozitsionnye materialy i konstruktsey”: Tezisy, Moskva, 16 noyabrya 2021 goda* [2nd International Conference “Composite Materials and Structures”: Theses. Moscow, November 16, 2021]. Moscow, “Pero” Publ., 2021, pp. 13–15.
- [11] Golovan V.I., Grishin V.I., Dzyuba A.S., Zamula G.N., Limonin M.V., Dudarkov Yu.I., et al. *Proektirovanie, raschety i staticheskie ispytaniya metallokompozitnykh konstruktsey* [Design, calculations and static tests of metal-composite structures]. Moscow, “Tekhnosfera”, 2022, 408 p. ISBN 978-5-94836-639-5
- [12] Dudarkov Yu.I., Limonin M.V. Opredelenie napryazheniy poperechnogo sdviga v sloistom kompozite [Determination of the transverse shear stress in layered composites]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov — Industrial laboratory. Diagnostics of Materials*, 2020, vol. 86, no. 2, pp. 44–53. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2020-86-2-44-53>
- [13] Dzyuba A.S., Dudarkov Yu.I., Limonin M.V. Raschet ekvivalentnykh moduley poperechnogo sdviga sloistogo kompozitsionnogo paketa [Calculation of

- equivalent transversal shear modules of a layered composite package]. *Uchenye zapiski TsAGI — TsAGI Science Journal*, 2020, vol. 51, no. 1, pp. 80–90.
- [14] Golovan V.I., Dudar'kov Yu.I., Levchenko E.A., Limonin M.V. Nesushchaya sposobnost paneley iz kompozitsionnykh materialov pri nalichii ekspluatatsionnykh povrezhdeniy [Load bearing capacity of composite panels with in-service damages]. *Trudy MAI*, 2020, no. 110, p. 5.
DOI: 10.34759/trd-2020-110-5
- [15] Mitrofanov O.V. *Proektirovanie nesushchikh paneley aviatsionnykh konstruksiy po zakriticheskomu sostoyaniyu* [Design of load-bearing panels of aircraft structures based on supercritical state]. Moscow, MAI (NIU) Publ., 2020, 160 p. ISBN 978-5-4316-0757-8
- [16] Mitrofanov O.V. *Prikladnye geometricheski nelineynye zadachi pri proektirovanii i raschetakh kompozitnykh aviatsionnykh konstruksiy* [Applied geometrically nonlinear problems in the design and calculations of composite aircraft structures]. Moscow, MAI (NIU) Publ., 2022, 164 p. ISBN 978-5-4316-0984-8
- [17] Mitrofanov O.V., Shkurin M.V. Otsenka geometricheski nelineynogo povedeniya kraevykh anizotropnykh defektov tipa rassloeniy v panelyakh iz kompozitnykh materialov pri szhatii [Assessment of geometrically nonlinear behavior of edge anisotropic defects such as delaminations in panels made of composite materials under compression]. In: *VIII Mezhdunarodnaya konferentsiya problemy mekhaniki sovremennykh mashin: Sbornik statey konferentsii, oz. Baykal, 4–9 iyulya 2022 goda* [VIII International Conference on Problems of Mechanics of Modern Machines: Collection of the conference articles]. Ulan-Ude, Vostochno-Sibirskiy Gosudarstvennyi Universitet Tekhnologii i Upravleniya Publ., 2022, pp. 498–505. DOI: 10.53980/9785907599055_498
- [18] Volmir A.S. *Gibkie plastiny i obolochki* [Flexible plates and shells]. Moscow, GITTL Publ., 1956, 419 p.
- [19] Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1957, 463 p.

Mitrofanov O.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department 101 “Aircraft Design and Certification”, Moscow Aviation Institute (National Research University).
e-mail: mitrofanovov@mai.ru

Shkurin M.V., Senior Lecturer, Department 101 “Aircraft Design and Certification”, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: m.shkurin@mai.ru

Dudchenko A.A., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of Department 602 “Design and Strength of Aviation, Missile and Space Products”, Moscow Aviation Institute (National Research University).